Tarea departametal # 1 de Álgebra Lineal
Área de Ciencias Básicas, Coordinación de Matemáticas
Facultad de Ingeniería, Universidad Anáhuac México Norte

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Escriba el sistema dado en la forma $Ax = b$:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

2. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre un sistema de ecuaciones en forma matricial ?
a. Es de la forma $A^{-1}x = b$.
b. Si tiene una solución única, la solución será $x = A^{-1}b$.
c. Tiene solución si A no es invertible.
d. Tiene una solución única.

3. ¿ Cuándo se dice que un sistema de ecuaciones es inconsistente ?

4. ¿ Cuándo se dice que un sistema de ecuaciones es homogéneo ?

5. Utilice el método de eliminación de GAUSS - JORDAN para encontrar las soluciones, si existen, del siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2x + y + 6z = 18, \\ 5x + 8z = -16, \\ 3x + 2y - 10z = -3. \end{cases}$$

6. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, están estacionados es cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tienen el doble de aviones de combate que bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y de bombarderos en el campo aéreo o muestre que la información del agente debe ser incorrecta ya que es inconsistente.

7. Resuelva el sistema de la manera siguiente:
A) Obtenga la inversa de la matriz de coeficientes (e. d. A^{-1}).
B) Utilice A^{-1} para resolver el sistema **Ax = b**

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ y - z = -4 \\ 3x + 5y + 7z = 7 \end{cases}$$

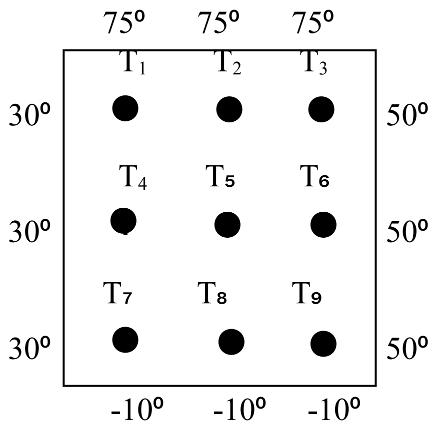
8. Encuentre tres soluciones distintas para el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones :

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 0, \\ 3x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

9. ¿ Para qué valores de k tendrá soluciones NO TRIVIALES el siguiente sistema ?

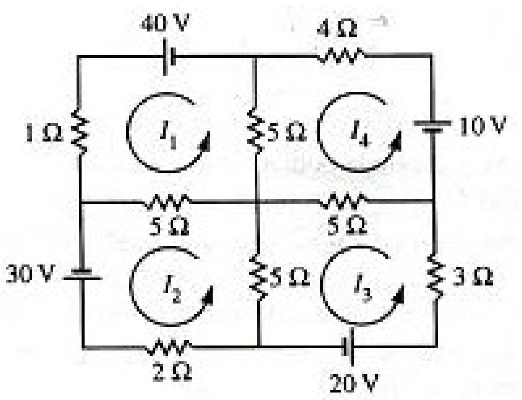
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + kz = 0 \end{cases}$$

10. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Suponga que la temperatura de un punto interior es el promedio de las temperaturas de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda. Se tiene interés en encontrar la temperatura en los puntos interiores.

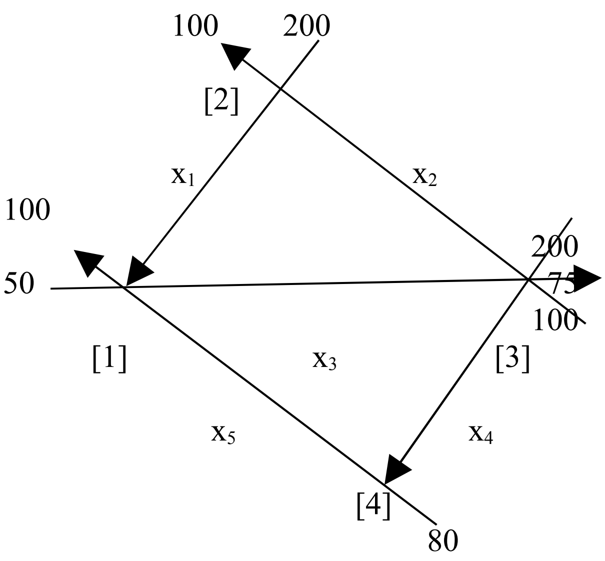


11. Determine las corrientes del circuito en la red de la figura.

Elaboraron y recopilaron: José de Jesús Ángel Ángel y Sergio Fuentes Martínez



12. Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por [k]. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_{i}= número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama de flujo del tráfico.



MATRICES

13. Diga lo que se entiende por:
Matriz. Dimensión de una matriz. Matriz triangular superior y triangular inferior. Matriz cuadrada y rectangular. Matriz identidad. Matriz transpuesta A^t. Matriz de coeficientes (para un sistema de ecuaciones). Matriz aumentada del sistema. Matriz simétrica.

14. Indique bajo qué condiciones es posible multiplicar 2 matrices.¿ Cómo se realiza ésta multiplicación ?

15. ¿ Es la suma de matrices asociativa ? ¿ es conmutativa ? Explique

16. Responda falso o verdadero:
a. A^t está definida sólo si A es una matriz cuadrada.
b. Si A es una matriz de nxn, entonces la diagonal principal de At es la misma que la diagonal principal de A.
c. $[(A^t)^t]t = A^t$

17. ¿ Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta ?
a. Toda matriz cuadrada tiene inversa.
b. Una matriz cuadrada tiene inversa si su reducción por renglones lleva a un renglón de ceros.
c. Una matriz cuadrada es invertible si tiene inversa.
d. Una matriz cuadrada B es la inversa de A si AI = B.

18. Demuestre que si la inversa de una matriz cuadrada existe, entonces es única.

19. Demuestre que si A y B son matrices de (n x n) invertibles, entonces el producto AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

20. ¿ Cómo se obtiene el ij-ésimo cofactor de una matriz A(n x n) ?

21. Encuentre los valores de x, y & z (si es que existen) para que la siguiente matriz sea simétrica

$$\begin{bmatrix} 20 & 9 & 2 & 2x+4y-3z \\ x+y+2z & 30 & -1 & 27 \\ 2 & -1 & 40 & 3x+6y-5z \\ 1 & 3x+3y+6z & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES

22. Calcule el determinante siguiente eligiendo de manera adecuada el renglón o columna para que el desarrollo sea lo más simple posible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

23. Describa tres situaciones diferentes bajo las cuales el determinante de una matriz sea (automáticamente) igual a cero.

24. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
a. El determinante de una suma de matrices es igual a la suma de los determinantes de las matrices.
b. El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

25. Encuentre el determinante de la matriz desarrollando por cofactores a lo largo del tercer renglón :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

26. Encuentre el determinante de la matriz transpuesta de A, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ESPACIOS VECTORIALES

27. Dar un ejemplo de un espacio vectorial del conjunto de matrices.

28. Dar un ejemplo del espacio vectorial del conjunto de funciones.

29. Demuestre que R^n es un espacio vectorial con las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar convencionales, es decir, verifique todas las propiedades que debe cumplir un espacio vectorial.

30. Utilizando las propiedades de un espacio vectorial resuelva para el vector **X** la ecuación siguiente justificando cada uno de los pasos realizados.

$$2\mathbf{X} - 8(1, 2, -3) = 3[(1, 0, 0) + 4\mathbf{X}]$$

31. ¿Qué elementos se requieren para definir un espacio vectorial?

32. ¿Puede el conjunto vacío $\varnothing$ constituir un espacio vectorial sobre el campo de los números reales? Justifique su respuesta.

33. Escriba en forma explícita lo siguiente:
a) El inverso aditivo del inverso aditivo de un vector a ε R^n.
b) El vector suma de a = (-2, 3, -4) con el inverso aditivo de b = (7, -7, 0) en R^4.
c) El vector de R^3 que sumado con el inverso aditivo del vector (1, -1, 4) da por resultado el vector producto 1.5(-4, 8, -2).

34. Realice las operaciones siguientes:
a) 8(1, 0, 0) –2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = ¿?
b) $\forall$ a ε R, b ε R, c ε R, a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = ¿?
c) ¿Qué puede usted inferir de los incisos anteriores? Redacte la explicación de su inferencia.

35. Escriba En forma explícita:
a) El neutro para la suma de R^3,
b) la suma del inverso aditivo de (1,1) con cinco veces el vector (4,5) en R^2,
c) la propiedad asociativa para la suma de vectores en R^4 .

36. Demuestre que el subconjunto de R^2, $S=\{(x,y) \mid x=y\}$ es un espacio vectorial.