



ESPACIOS VECTORIALES

- Demuestre que dos vectores en \mathbb{R}^n son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es múltiplo de otro.
- Diga si los siguientes pares de vectores son linealmente independientes.
a) $(2,4,1)$ y $(8,16,4)$;
b) $(2,5,1,0,1)$ y $(-3,5,1,0,1)$.
- Aplicando la definición, demuestre si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.
a) $\{(2,1)\}$
b) $\{(3,2,1), (1,0,0), (-4,5,-2)\}$
c) $\{(1,2,3,4), (0,2,3,4), (0,0,3,4), (0,0,0,4)\}$
- Analice los siguientes conjuntos de vectores y determine si constituyen bases de los espacios correspondientes.
a) $\{(3,1), (1,2)\}$ de \mathbb{R}^2
c) $\{(1,1,1), (0,5,2), (0,0,-4)\}$ de \mathbb{R}^3
d) $\{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ de \mathbb{R}^4

- Explique por que cada uno de los conjuntos de vectores de \mathbb{R}^3 no pueden constituir una base de este espacio.
a) $\{(1,2,1), (2,5,4)\}$
b) $\{(1,-1,3), (0,0,0), (2,3,6)\}$
c) $\{(1,1,1), (3,4,3), (2,2,2)\}$
d) $\{(1,1,3), (2,6,4), (5,3,5), (3,2,1), (2,3,7)\}$
- Sean
 $\beta = \{\vec{v}_1 = (1,-1,0), \vec{v}_2 = (2,-1,1), \vec{v}_3 = (1,3,0)\}$ base de \mathbb{R}^3 y $\vec{x} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ encuentre la representación de \vec{x} en términos de la nueva base
 $\beta' = \{\vec{v}'_1 = (1,1,0), \vec{v}'_2 = (0,-1,0), \vec{v}'_3 = (-1,0,2)\}$

PRODUCTO INTERNO

- Demuestre que los puntos $A(1,1)$, $B(2,3)$ y $C(5,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

- Usando el concepto de proyección de un vector sobre otro calcule el área del triángulo cuyos vértices son: $(0,0)$, $(5,3)$ y $(7,8)$.
- Verifique la desigualdad triangular con $x=(2,1,-2)$, $y=(3,1,2)$ y determine su ángulo.
- Sean \mathbf{x}, \mathbf{y} dos vectores ortogonales en \mathbb{R}^n , tales que $\|\mathbf{x}\|=3, \|\mathbf{y}\|=7$. Calcule $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.
- Calcule la distancia entre las dos líneas paralelas dadas: $3x-4y+5=0$, $3x-4y-5=0$.
- Considere los vectores $\mathbf{a} = (-2, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{c} = (1, -2, 0)$ calcule las operaciones siguientes:
a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ?$ ¿son ortogonales éstos vectores?
b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = ?$ ¿son ortogonales éstos vectores?
c) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} =$
d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} =$
e) $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] =$
f) $\hat{\mathbf{a}} =$
g) $\text{Proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{c} =$
h) $\text{Comp}_{\mathbf{a}} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) =$
- Sea \vec{v} un vector en \mathbb{R}^n . Demuestre que el conjunto $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- Demuestre que
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} (\|\vec{A} + \vec{B}\|^2 - \|\vec{A} - \vec{B}\|^2).$$
- Encuentre un vector (x, y, z) en \mathbb{R}^3 que sea ortogonal a los vectores $(3, 1, 1)$ y $(2, 1, 5)$.
- Asociando vectores de manera conveniente, calcule el área del paralelogramo con vértices en los puntos $P_1(2, 2, 2)$, $P_2(4, 6, 8)$, $P_3(-4, 2, 10)$ y $P_4(-2, 6, 16)$.
- ¿Cuál es el valor de x para que el vector $3\hat{i} - x\hat{j} + 4\hat{k}$ sea perpendicular al vector $(-2, 4, 1)$?



Tarea departamental # 2 de Álgebra Lineal
Área de Ciencias Básicas, Coordinación de Matemáticas
Facultad de Ingeniería, Universidad Anáhuac México Norte

18. Encuentre dos vectores unitarios perpendiculares a los vectores $\mathbf{a} = (3, 2, 5)$ y $\mathbf{b} = (-4, 2, 0)$.

19. Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{C}$, explique si puede concluirse entonces que $\vec{B} = \vec{C}$.

20. Demuestre que $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$,
 $\vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

21. Sean los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en \mathbb{R}^3 tal que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

22. Determine si los vectores $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{B} = (3, -1, 0)$ y $\mathbf{C} = (7, -7, -2)$ son coplanares.

23. Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{B} = (-3, 1, 1)$ y $\mathbf{C} = (0, -4, 0)$.

24. Considere que el conjunto de vectores $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n . Demuestre que el único vector \mathbf{v} en \mathbb{R}^n que es ortogonal a todos y cada uno de los vectores del conjunto β es el vector $\mathbf{0}$.

25. Sea \mathbf{B} una base ortonormal de \mathbb{R}^2 , demostrar que la rotación de los vectores de \mathbf{B} sigue siendo una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .

26. Si los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 2)$ forman una base de \mathbb{R}^3 , encontrar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

27. Demostrar que los vectores linealmente independientes son vectores ortogonales.

TRANSFORMACIONES LINEALES

28. Determinar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales

- $L(x, y) = (x+1, y, x+y)$
- $L(x, y, z) = (x+y, y, x-z)$
- $L(x, y, z) = (2x-3y, 2y-2z, x+y-z)$

29. Verificar si el punto dado esta en la imagen de la transformación lineal L .

$L(x, y, z) = (x+z, y+z, x+2y+2z)$

- $\mathbf{P} = (1, -1, 0)$
- $\mathbf{P} = (2, -1, 3)$
- $\mathbf{P} = (-1, -1, -1)$

30. Determinar una transformación lineal de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 tal que $L(\mathbf{i}) = (1, 1, 1)$, $L(\mathbf{j}) = (-1, 1, 0)$, $L(\mathbf{k}) = (0, -1, 0)$.

31. Determinar una base del kernel de la siguientes transformaciones lineales siguientes:

- $L(x, y, z) = (x+y, x+z)$
- $L(x, y, z, w) = (x+y+z-w, 2x-z+w)$
- $L(x, y, z, w, s) = (3x+2y-z+5w-s)$

32. Demostrar, que si una transformación lineal tiene $\text{kernel} = \{0\}$, entonces es inyectiva.

33. Sea T la transformación lineal determinada por la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Entonces T es la rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj.

- Si $\mathbf{P} = (1, 0)$ y $\alpha = 30^\circ$, encontrar $T(\mathbf{P})$, dibujarlo.
- Si $\mathbf{P} = (1, 1)$ y $\alpha = 60^\circ$, encontrar $T(\mathbf{P})$, dibujarlo.
- Interpretar la acción de R , si $R(\mathbf{P}) = A^2 \mathbf{P}$.
- Interpretar la acción de S , si $S(\mathbf{P}) = A^{-1} \mathbf{P}$.

34. Determinar las coordenadas el punto $\mathbf{P} = (3, \sqrt{5})$ bajo la rotación de $\alpha = 45^\circ$.

35. Dar la lista de las matrices correspondientes a las transformaciones siguientes:

- Reflexión respecto al eje x .
- Reflexión respecto al eje y .
- Reflexión respecto a la línea $y=x$.
- Reflexión respecto a la línea $y = -x$.

36. Mostrar con un ejemplo que la reflexión respecto a la línea $y=ax$, \mathbf{R} , se puede escribir como $\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$, donde \mathbf{P} es una rotación y \mathbf{A} es la reflexión respecto a uno de los ejes coordenados.

37. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables.

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.



Tarea departamental # 2 de Álgebra Lineal
Área de Ciencias Básicas, Coordinación de Matemáticas
Facultad de Ingeniería, Universidad Anáhuac México Norte

38. Mostrar que si 0 es un valor propio de la matriz \mathbf{A} , entonces \mathbf{A} es singular.

39. Para los siguientes casos de matrices determinar \mathbf{P} tal que $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$, donde \mathbf{P} es una matriz no singular, y \mathbf{D} es diagonal. Siguiendo

:

- Encontrar los valores propios.
- Encontrar los vectores propios.
- Determinar \mathbf{D} , y \mathbf{P} .
- Encontrar \mathbf{P}^{-1} .
- Mostrar que en efecto $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

40. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$