Tarea departamental # 2 de Álgebra Lineal
Área de Ciencias Básicas, Coordinación de Matemáticas
Facultad de Ingeniería, Universidad Anáhuac México Norte

ESPACIOS VECTORIALES

1. Demuestre que dos vectores en R^n son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es múltiplo de otro.

2. Diga si los siguientes pares de vectores son linealmente independientes.
a)(2,4,1) y (8,16,4);
b)(2,5,1,0,1) y (-3,5,1,0,1).

3. Aplicando la definición, demuestre si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.
a) {(2,1)}
b) {(3,2,1), (1,0,0), (-4,5,-2)}
c) {(1,2,3,4), (0,2,3,4), (0,0,3,4), (0,0,0,4)}

4. Analice los siguientes conjuntos de vectores y determine si constituyen bases de los espacios correspondientes.
a){(3,1), (1,2)} de ^{2}
c) {(1,1,1), (0,5,2), (0,0,-4)} de ^{3}
d) {(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)} de R^4

5. Explique por que cada uno de los conjuntos de vectores de R^3 no pueden constituir una base de este espacio.
a) {(1,2,1), (2,5,4)}
b) {(1,-1,3),(0,0,0), (2,3,6)}
c) {(1,1,1), (3,4,3), (2,2,2)}
d) {(1,1,3), (2,6,4), (5,3,5), (3,2,1), (2,3,7)}

6. Sean
$\beta=\{\bar v_1=(1,-1,0),\bar v_2=(2,-1,1),\bar v_3=(1,3,0)\}$ base de R^3 y $\bar x=3\bar v_1-2\bar v_2+\bar v_3$ encuentre la representación de $\bar x$ en términos de la nueva base
$\beta'=\{\bar v_1=(1,1,0),\bar v_2=(0,-1,0),\bar v_3=(-1,0,2)\}$

PRODUCTO INTERNO

7. Demuestre que los puntos A(1,1), B(2,3) y C(5,-1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Usando el concepto de proyección de un vector sobre otro calcule el área del triángulo cuyos vértices son: (0,0), (5,3) y (7,8).

9. Verifique la desigualdad triangular con x=(2,1,-2), y=(3,1,2) y determine su ángulo.

10. Sean **x**,**y** dos vectores ortogonales en ^{n}, tales que ||**x**||=3,||**y**||=7. Calcule||**x+y**||, ||**x-y**||.

11. Calcule la distancia entre las dos líneas paralelas dadas: 3x-4y+5=0, 3x-4y-5=0.

12. Considere los vectores **a** = (-2, 3, 0), **b** = (1, 0, -1) y **c** = (1, -2, 0) calcule las operaciones siguientes:
a) **a·b** = ¿? ¿son ortogonales éstos vectores?
b) **a·c** = ¿? ¿son ortogonales éstos vectores?
c) (**a·b**)**c** =
d) (**a+b**) × **c** =
e) [**a b c**] =
f) **â** =
g) $\mathbf{Proy_b\, c} =$
h) $\mathbf{Comp_a\,(b+c)} =$

13. Sea $\bar v$ un vector en ^{n}. Demuestre que el conjunto $S=\{\bar x\in R^3 \mid \bar x\cdot\bar v=0\}$ es un subespacio de ^{n}.

14. Demuestre que
$$\bar A\cdot\bar B=\frac{1}{4}(\|\bar A+\bar B^2\|-\|\bar A-\bar B\|^2).$$

15. Encuentre un vector (x, y, z) en ^{3} que sea ortogonal a los vectores (3, 1, 1) y (2, 1, 5).

16. Asociando vectores de manera conveniente, calcule el área del paralelogramo con vértices en los puntos P_1 (2, 2, 2), P_2 (4, 6, 8), P_3 (-4, 2, 10) y P_4 (-2, 6, 16).

17. ¿Cuál es el valor de x para que el vector $3\hat i-x\hat j+4\hat k$ sea perpendicular al vector (-2, 4, 1)?

18. Encuentre dos vectores unitarios perpendiculares a los vectores **a** = (3, 2, 5) y **b** = (-4, 2, 0).

19. Si $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$, explique si puede concluirse entonces que $\vec{B}=\vec{C}$.

20. Demuestre que $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in R^3$,

$\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$.

21. Sean los vectores **a**, **b**, **c** en ^{3} tal que **a + b + c = 0**. Demuestre que **a × b = c × a**.

22. Determine si los vectores **A** = (1, 2 , 1), **B** = (3, -1, 0) y **C** = (7, -7, -2) son coplanares.

23. Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores **A** = (1, 2 , 1), **B** = (-3, 1, 1) y **C** = (0, -4, 0).

24. Considere que el conjunto de vectores β={ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_n$ } es una base de R^n. Demuestre que el único vector v en ^{n} que es ortogonal a todos y cada uno de los vectores del conjunto β es el vector **0**.

25. Sea **B** una base ortonormal de $\mathbf{R}^2$, demostrar que la rotación de los vectores de **B** sigue siendo una base ortonormal de $\mathbf{R}^2$.

26. Si los vectores (*1,1,1*), (*1,0,-1*), (*0,1,2*) forman una base de $\mathbf{R}^3$**,** encontrar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

27. Demostrar que los vectores linealmente independientes son vectores ortogonales.

TRANSFORMACIONES LINEALES

28. Determinar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales
a) **L**(*x,y*)=(*x+1,y,x+y*)
b) **L**(*x,y,z*)=(*x+y,y,x-z*)
c) **L**(*x,y,z*)=(*2x-3y, 2y-2z, x+y-z*)

29. Verificar si el punto dado esta en la imagen de la transformación lineal **L**.
L(x,y,z)=(x+z,y+z,x+2y+2z)
a) **P**=(1,-1,0)
b) **P**=(2,-1,3)
c) **P**=(-1,-1,-1)

30. Determinar una transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ tal que **L**(**i**)=(*1,1,1*), **L**(**j**)=(*-1,10*), **L**(**k**)=(*0,-1,0*).

31. Determinar una base del kernel de la siguientes transformaciones lineales siguientes:
a) **L**(*x,y,z*)=(*x+y,x+z*)
b) **L**(*x,y,z,w*)=(*x+y+z-w,2x-z+w*)
c) **L**(*x,y,z,w,s*)=(*3x+2y-z+5w-s*)

32. Demostrar, que si una transformación lineal tiene kernel={0}, entonces es inyectiva.

33. Sea **T** la transformación líneal determinada por la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
Entonces T es la rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj.
a) Si **P**=(1,0) y α=30°, encontrar T(**P**), dibujarlo.
b) Si **P**=(1,1) y α=60°, encontrar T(**P**), dibujarlo.
c) Interpretar la acción de R, si R(**P**)=$\mathbf{A}^2\mathbf{P}$.
d) Interpretar la acción de S, si S(**P**)=$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$.

34. Determinar las coordenadas el punto P=(3, $\sqrt{5}$) bajo la rotación de α=45°.

35. Dar la lista de las matrices correspondientes a las transformaciones siguientes:
a) Reflexión respecto al eje *x*.
b) Reflexión respecto al eje *y*.
c) Reflexión respecto a la línea *y=x*.
d) Reflexión respecto a la línea *y = -x*.

36. Mostrar con un ejemplo que la reflexión respecto a la línea *y=ax,* **R**, se puede escribir como $\mathbf{R}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, donde P es una rotación y **A** es la reflexión respecto a uno de los ejes coordenados.

37. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables.
a) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

38. Mostrar que si 0 es un valor propio de la matriz **A**, entonces **A** es singular.

39. Para los siguientes casos de matrices determinar **P** tal que **A=P^{-1}DP**, donde **P** es una matriz no singular, y **D** es diagonal. Siguiendo :

a) Encontrar los valores propios.
b) Encontrar los vectores propios.
c) Determinar **D**, y **P**.
d) Encontrar **P^{-1}**.
e) Mostrar que en efecto **A=P^{-1}DP.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

40. Hacer los mismo que en el ejercicio anterior para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$