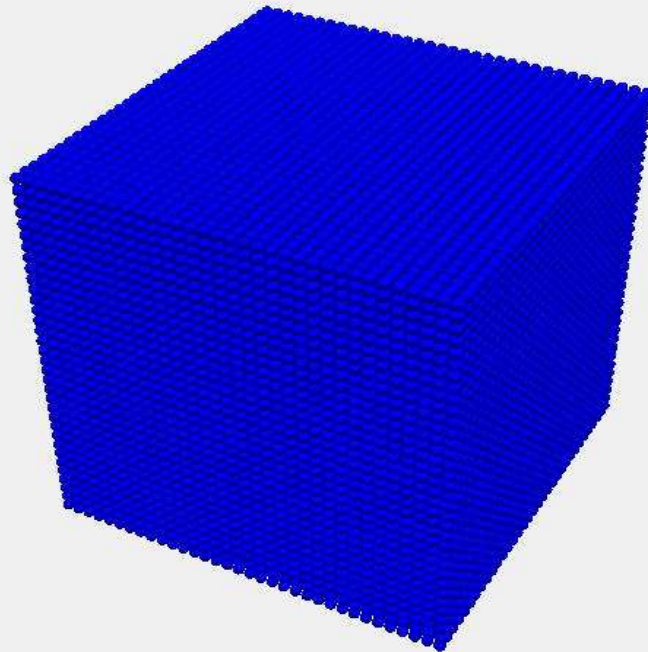


**MathCon**  
*The Mathematics Firm*

**Modelo de Leontief**



# Contenido

<b>1. Modelo de Leontief</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Ejercicios . . . . .	3

# 1

## Modelo de Leontief

### 1.1. Introducción

Wassily Leontief fue un economista de Berlín ganador del premio Nobel en 1973. Su modelo económico Input-Output que usa el álgebra matricial es uno de los más conocidos e importantes de su época.

El modelo supone que la economía está conformada por diversos sectores de producción y servicios. Por un lado existe una demanda interna que satisfacer de los mismos sectores, por otro lado existe una demanda externa que también hay que satisfacer.

La siguiente tabla, define las necesidades de producción interna.

producción \ demanda	Agricultura	Manufactura	Servicios
Agricultura	0,4	0,03	0,02
Manufactura	0,06	0,37	0,1
Servicios	0,12	0,15	0,19

La tabla se explica de la siguiente manera: la columna (de demanda) de agricultura, dice que este sector requiere 0.4 de su propia producción, 0.06 del sector manufacturero, y 0.12 de servicios. La columna Manufactura, requiere de 0.03 del sector agricultura, 0.37 de su propia producción y 0.15 de servicios. Finalmente la columna servicios requiere de 0.02 de agricultura, 0.1 de manufactura y 0.19 de su propia producción.

Ahora podemos definir a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,03 & 0,02 \\ 0,06 & 0,37 & 0,1 \\ 0,12 & 0,15 & 0,19 \end{pmatrix}$$

Si  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix}$  es el vector de demanda externa, y  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_M \\ x_S \end{pmatrix}$  el vector producción, entonces la ecuación:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

determina la producción total, que satisface la demanda interna y externa.

De donde  $I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , entonces  $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , y así

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,03 & 0,02 \\ 0,06 & 0,37 & 0,1 \\ 0,12 & 0,15 & 0,19 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0,6 & -0,03 & -0,02 \\ -0,06 & 0,63 & -0,1 \\ -0,12 & -0,15 & 0,81 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,686 & 0,092 & 0,053 \\ 0,206 & 1,646 & 0,208 \\ 0,288 & 0,318 & 1,281 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 140 \\ 200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 158,36 \\ 288,52 \\ 323,76 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 1.2. Ejercicios

1. Un pequeño pueblo tiene 3 industrias primarias, una mina de cobre, un ferrocarril, y una planta de energía eléctrica. Para producir una unidad (1 \$) de cobre la mina gasta \$0.20 de cobre, \$0.1 de transporte, \$0.2 de energía eléctrica. Para producir \$1 de transporte, el ferrocarril requiere de \$0.1 de cobre, \$0.1 de transporte, y \$0.4 de energía eléctrica. Para producir \$1 de energía eléctrica, la planta destina \$0.2 de cobre, \$0.2 de transporte, y \$0.3 de energía eléctrica. Suponga que durante un año hay una demanda externa de 1,2 millones de dólares de cobre, 0.8 millones de dólares de transporte, y 1.5 millones de dólares por concepto de energía. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer la demanda total?
2. Considerando las industrias química, la médica y la de servicios, se sabe que hay una demanda de la industria química de 0.25 de su propia producción, 0.35 de la médica, y 0.1 de servicios. Para producir una unidad de medicamentos, se requiere de 0.15 de la industria química, 0.2 de su propia producción y 0.1 de servicios. Existe también una demanda de la industria de servicios de 0.15 de medicamentos, 0.25 de químicos y 0.35 del mismo transporte. Si hay una demanda externa de 600 de químicos, de 1100 de medicinas y 600 de transporte ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer la demanda total?
3. En una compañía que produce, gasolina, aceite y gas, se sabe que para producir una unidad de gasolina usa 1 unidad de aceite y una de gas. Para producir una unidad de aceite, requiere de 1/5 unidades de aceite y 2/5 de gas. Finalmente para producir una unidad de gas requiere 1/5 de gasolina, 2/5 de aceite y 1/5 de gas. Si tiene una demanda del mercado de 100 unidades de cada producto. ¿Cuánto debe producir la compañía de cada producto para cumplir con su mercado?

4. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

5. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 0,0 & 0,7 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 283,3 \\ 517,6 \\ 733,3 \end{pmatrix}$

6. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 343,8 \\ 290,7 \\ 206,9 \end{pmatrix}$

7. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,2 \\ 0,0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 269,8 \\ 88,6 \\ 69,8 \end{pmatrix}$

8. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 1750,0 \\ 1930,0 \\ 1940,0 \end{pmatrix}$

9. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,0 & 0,8 \\ 0,0 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 773,9 \\ 1147,8 \\ 926,0 \end{pmatrix}$

10. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 747,7 \\ 375,0 \\ 831,8 \end{pmatrix}$

11. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,6 \\ 0,0 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 174,7 \\ 134,9 \\ 179,1 \end{pmatrix}$

12. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,0 & 0,5 & 0,7 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 485,0 \\ 515,0 \\ 325,0 \end{pmatrix}$

13. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 133,3 \\ 80,0 \\ 140,0 \end{pmatrix}$$

14. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,0 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 7240,0 \\ 1900,0 \\ 11060,0 \end{pmatrix}$$

15. En un modelo de Leontief la matriz de demanda interna es:  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matriz de demanda externa es:  $B = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 10 \end{pmatrix}$

Encontrar la matriz de producción que satisface tanto la demanda interna como la externa.

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 248,7 \\ 253,8 \\ 428,2 \end{pmatrix}$$