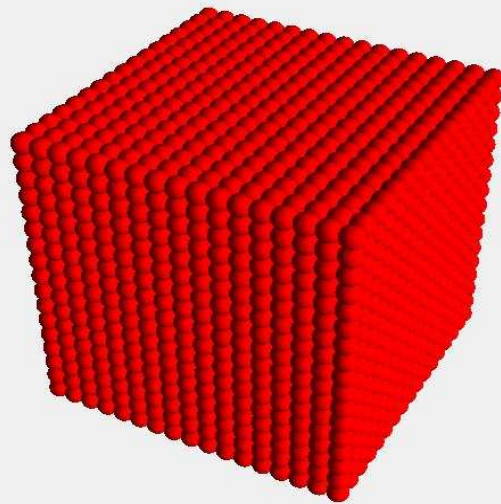


MathCon
The Mathematics Firm

Ecuaciones Diferenciales



Contenido

1. Ecuaciones Diferenciales	2
1.1. Ecuaciones diferenciales lineales	2
1.1.1. Ejemplos	3
1.1.2. Ejercicios	3
1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	3
1.3. Ejercicios	4
1.3.1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	4
1.4. Ejercicios	5
1.4.1. ejercicios	5

1

Ecuaciones Diferenciales

1.1. Ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección solo repasaremos las definiciones importantes sobre ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 1 Una ecuación diferencial lineal tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Si $g(x) = 0$, se llama homogénea, de lo contrario es no-homogénea.

Definición 2 Si las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ poseen al menos $n - 1$ derivadas. El determinante,

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & \vdots & \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se llama el wronskiano de las funciones.

Teorema 1 Si y_1, y_2, \dots, y_n son n soluciones de una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden en el intervalo I . El conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si $W(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ en todo I .

Teorema 2 Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I . Entonces

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

es la solución general de la ECLH.

1.1.1. Ejemplos

1. Las funciones $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal $y'' - 9y = 0$ en todo \mathbb{R} . Como:

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

las soluciones y_1, y_2 constituyen un conjunto de soluciones linealmente independiente (llamado también conjunto fundamental de soluciones), en consecuencia $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ es una solución general de la ecuación en \mathbb{R} .

2. Verificar si las funciones $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ en todo \mathbb{R} .

1.1.2. Ejercicios

- $y'' - y' - 12y = 0$, e^{-3x}, e^{4x} , en \mathbb{R} .
- $y'' - 2y' + 5y = 0$, $e^x \cos(2x), e^x \sin(2x)$, en \mathbb{R} .
- $4y'' - 4y' + y = 0$, $e^{x/2}, xe^{x/2}$, en \mathbb{R} .
- $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$, $x, x^{-2}, x^{-2} \ln x$, en $(0, \infty)$.

1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Definición 3 Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

Si las funciones $f_i(t) = 0$ del anterior sistema, entonces el sistema se llama homogéneo.

El sistema se puede escribir de manera matricial de la siguiente forma:

$$X' = AX + F$$

Teorema 3 Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$, ..., $X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$, soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo. Entonces los vectores son linealmente independientes en un intervalo I si y sólo si el wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ & & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Definición 4

Sean X_1, X_2, \dots, X_n un conjunto linealmente independiente de soluciones (llamado también conjunto fundamental de soluciones). Entonces la solución general del sistema es:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n.$$

1.3. Ejercicios

- Mostrar que $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ son solución de $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ y son linealmente independientes, escribir entonces la solución general del sistema.

1.3.1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Teorema 4 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores propios reales y distintos de la matriz A , y sean k_1, k_2, \dots, k_n los vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del sistema lineal homogéneo $X' = AX$ en $(-\infty, +\infty)$ es

$$X = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 k_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, c_n k_n e^{\lambda_n t}$$

1.4. Ejercicios

Resolver:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

De donde la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$, por lo tanto los valores propios son
 $-1, 4$

Los vectores propios son:

1. Para -1 , $(1, -1)$.
2. Para 4 , $(3, 2)$.

Por lo tanto la solución general del sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo es:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

1.4.1. ejercicios

$$1. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 3y\end{aligned}$$

$$2. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y\end{aligned}$$

$$3. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{5}{2}x + 2y\end{aligned}$$

$$4. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{5}{2}x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}x - 2y\end{aligned}$$

$$5. X' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} X.$$

$$6. X' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X.$$

$$7. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - z \\ \frac{dy}{dt} &= 2y \\ \frac{dz}{dt} &= y - z \end{aligned}$$

$$8. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 7y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 10y + 4z \\ \frac{dz}{dt} &= 5y + 2z \end{aligned}$$

$$9. X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} X.$$

$$10. X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$