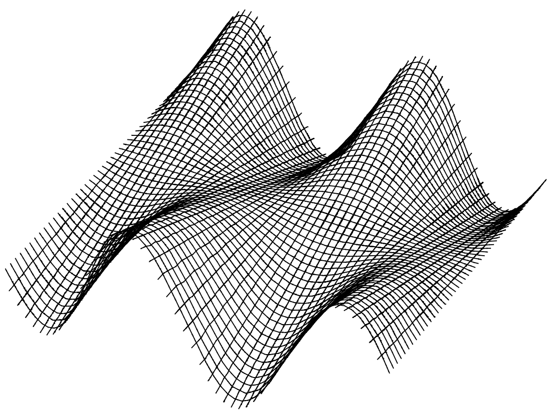
MathCon
The Mathematics Firm

Matrices de Pauli



www.math.com.mx
José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Matrices de Pauli

Definamos al siguiente conjunto de matrices, como las matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donde $i^2 = -1$.

Las primeras propiedades (de simetría) de estas matrices son las siguientes:

1. $\sigma_0^T = \sigma_0$.
2. $\sigma_1^T = \sigma_1$.
3. $\sigma_2^T = -\sigma_2$.
4. $\sigma_3^T = \sigma_3$.

Más propiedades (de orden):

1. $\sigma_0^2 = I_2$.
2. $\sigma_1^2 = I_2$.
3. $\sigma_2^2 = I_2$.
4. $\sigma_3^2 = I_2$.

Más propiedades (permutaciones):

1. $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma 3$.
2. $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma 1$.
3. $\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma 2$.

4. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = iI_2$.

Se puede escribir como:

$\sigma_l\sigma_m = -\sigma_m\sigma_l$ donde $l, m \in \{1, 2, 3\}$ y $l \neq m$.

Ejercicios:

1. Verificar las propiedades antes mencionadas.
2. Verificar si las matrices de Pauli son invertibles, en tal caso encontrar su inversa.
3. Verificar que: $tr(\sigma_i) = 0$.
4. Verificar que: $Det(\sigma_i) = -1$.
5. Verificar que: $tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$.
6. Verificar que los valores propios de las matrices de Pauli son ± 1.

Definición 1 *Una matriz compleja cuadrada A es una matriz Hermitiana si es igual a la transpuesta de su conjugada.*

Ejemplos:

1. Cada matriz de Pauli es Hermitiana.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$

Nota 1 *Toda matriz Hermitiana 2×2 es combinación lineal de matrices de Pauli.*

2

Compuertas cuánticas

Una compuerta cuántica juega el papel de las compuertas lógicas binarias NOT, OR, etc.
La unidad mínima de información cuántica se llama $qbit$.

1. Sea $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, llamado ket-cero.
2. Sea $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, llamado ket-uno.
3. Cualquier otro $qbit$ se representa (según Dirac) como una combinación lineal del ket-cero y el ket-uno $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, donde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Ejemplos de compuertas cuánticas elementales:

1. Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es la compuerta identidad.
2. Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, es la compuerta negación, una reflexión sobre la línea $y = x$.
3. Si $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es la compuerta de Hadamart.
   Como $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   La compuerta de Hadamart es la reflexión respecto al eje x seguida de una rotación de $45°$.