# Algebra Lineal*

José de Jesús Ángel Ángel
jjaa@math.com.mx

Working draft: México, D.F., a 17 de noviembre de 2010.

**Un resumen de los principales temas tratados en un curso de Álgebra Lineal.**

## Contenido



*Notas de Curso

# 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

## 1.1. Conceptos básicos.

Un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas es el siguiente arreglo:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Donde las constantes $a_{11}, .., a_{1n}, a_{12}, ...a_{2n}, .., a_{m1}, .., a_{mn}, b_1, .., b_m \in \mathbb{R}$, y las incógnitas $x_1, .., x_n$ representan también números reales generalmente.

**Definición 1** *Una solución de un sistema de ecuaciones, es un conjunto de valores que toman las incógnitas $x_1, .., x_n$ y dan como resultado todas las igualdades del sistema de ecuaciones verdaderas.*

**Operaciones elementales sobre los sistemas de ecuaciones:**

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

**Proposición 1** *Un sistema de ecuaciones B, que se obtiene de otro A, por medio de operaciones elementales tienen el mismo conjunto de soluciones.*

## 1.2. Método de eliminación de Gauss.

**Método 1** *El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones A, a otro B, por medio de operaciones elementales, de tal forma que B queda en una forma triangular y por lo tanto puede ser resuelto con despejes sucesivos simples.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & & a'_{33}x_3 & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a'_{mn}x_m & = & b'_m
\end{array}
$$

## 1.3. Método de eliminación de Gauss-Jordan.

**Método 2** *El método de Gauss-Jordan consiste en transformar un sistema de ecuaciones A, a otro B, por medio de operaciones elementales, de tal forma que B queda en la siguiente forma diagonal y por lo tanto la solución queda de manera directa.*

$$
\begin{array}{cccccc}
a'_{11}x_1 & & & & = & b'_1 \\
 & a'_{22}x_2 & & & = & b'_2 \\
 & & a'_{33}x_3 & & = & b'_3 \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & a'_{mn}x_m & = & b'_m
\end{array}
$$

## 1.4. Sistemas Homogéneos.

Son de especial interés los sistemas de ecuaciones donde $b_1 = \cdots = b_n = 0$. A estos sistemas les llamaremos sistemas homogéneos.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

Los sistemas homogéneos siempre tienen al menos una solución, la solución trivial.

### 1.5. Soluciones de SEL.

Los sistemas de ecuaciones lineales, siempre o tienen una única solución, o tienen una infinidad de soluciones (caso de consistencia), o no tienen solución (caso de inconsistencia).

Después de aplicar la reducción de Gauss:

1. Si hay el mismo número de ecuaciones que de variables, entonces el sistema tiene una única solución.
2. Si hay más variables que ecuaciones, entonces hay una infinidad de soluciones.
3. Si obtenemos una contradicción, entonces no hay solución.

## 2. Teoría matricial y determinantes.

**Definición 2** *Una matriz es una función $A$ de $[1,..,n] \times [1,..,m]$, al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.*

Una matriz $A$ se representa con todos sus valores de manera usual como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## 2.1. Matrices, sus operaciones y propiedades.

### 2.1.1. Suma de Matrices

La suma de matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ con $1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$, esta definida como:

$$A + B = (c_{ij}),\ \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

La suma de matrices esta definida para dos matrices del mismo orden, es decir podemos sumar una matriz $n \times m$ por otra $n \times m$.

### 2.1.2. Multiplicación por un escalar

La multiplicación de una matriz $A = (a_{ij})$ por un escalar $r$ con $1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$. esta definida como:

$$rA = (c_{ij}),\ \ c_{ij} = ra_{ij},\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

### 2.1.3. Multiplicación de Matrices

La multiplicación de matrices $A = (a_{ij})\ \ m \times p$ por $B = (b_{ij})\ \ p \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Tiene como resultado una matriz $C = (c_{ij})\ \ m \times n$, y esta definida como:

$$AB = (c_{ij}),\ \ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip} + b_{pj},\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

$$c_{ij} = \sum_{k=i}^{p}(a_{ik}b_{kj}),\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

**Nota 1** *El producto de matrices no es conmutativo, y solo esta definido para matrices $n \times m$ por otra matriz $m \times k$ y da como resultado una matriz $n \times k$.*

## 2.2. Matrices especiales.

### 2.2.1. Matriz Cuadrada

Una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas que de columnas, $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq n$,
definida como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### 2.2.2. Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta de $A = (a_{ij})\ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq n$, es la matriz $A^T = (a_{ji})$, cambia solo las filas por columnas y las columnas por filas.
Si,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

### 2.2.3. Matriz Identidad

Una matriz cuadrada $I = (a_{ij})$, se llama identidad si $a_{ij} = 1$ para $i = j$, y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.3. Matriz inversa y su determinación mediante operaciones Elementales.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, se llama invertible (no singular), si existe otra matriz (llamada inversa $A^{-1}$) tal que $A \cdot A^{-1} = I$.

Algunas propiedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Método para obtener la matriz inversa de $A$:

1. Formar la matriz $(A|I)$ que significa adjuntar la matriz identidad a $A$.
2. Aplicar operaciones elementales a las filas de $A$, hasta obtener la matriz identidad, (las mismas operaciones elementales hay que realizarlas a las filas de $I$ adjunta.)
3. Entonces la matriz resultante en lugar de $I$ adjunta es la inversa.

**Nota 2** *Es muy importante saber antes si la matriz inversa existe.*

## 2.4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales por matriz inversa.

Obsérvese que un sistema de ecuaciones homogéneo puede ser puesto en términos de matrices.

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Entonces puede ser escrito de manera matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si la matriz $A$ tiene inversa, entonces:

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1}b.}$$

## 2.5. Determinantes y sus propiedades.

Uno de los elementos más importantes de las matrices es el determinante. El determinate de una matriz es una función definida del conjunto de matrices cuadradas $(n \times n)$ $M_n$ a los números reales $\mathbb{R}$.

La definición de determinate es:

$$\boxed{det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

Donde $S_n$ es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, .., n\}$, $sig(\sigma)$ es el signo de la permutación, y $\sigma(i)$ es la imagen de $i$ bajo sigma.

La fórmula anterior nos dice que la definición de determinante es muy complicada ya que el número de términos crece de manera como crece el factorial de $n$. Por ejemplo el determinate de una matriz $4 \times 4$ tendrá $4! = 24$ términos.

**Propiedades del determinante.**

1. $det(A) = det(A^T)$.
2. Si a una matriz $A$ se cambian dos filas o dos columnas a $(B)$, entonces $det(B) = det(A)$.
3. Si dos filas o dos columnas de $A$ son iguales, entonces $det(A) = 0$.
4. Si una fila o columna de $A$ son ceros, entonces $det(A) = 0$.
5. Si a una matriz $A$ se multiplica por una constante$(B = cA)$, entonces $det(B) = c \cdot det(A)$.
6. Si a una matriz $B$ se obtiene de sumar un múltiplo una fila o columna de una matriz $A$, $det(B) = det(A)$.
7. El determinante de una matriz $A$ triangular es $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, el producto de la diagonal.
8. $det(AB) = det(A)det(B)$.

9. $A$ tiene inversa, es equivalente a $det(A) \neq 0$, y es equivalente a que el sistema $A\mathbf{x} = 0$ tiene solución única .

10. $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

## 2.6. Cálculo de la matriz inversa por medio de determinantes.

Sea $A$ una matriz cuadrada,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces definimos a la matriz adjunta $adj(A)$ como:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

y $M_{ij}$ es el menor del elemento $a_{ij}$, que es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene quitando de $A$ la fila $i$-ésima y la columna $j$-ésima.

Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A)).$$

### 2.7. Regla de Cramer.

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Entonces la regla de Cramer dice que:

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)},$$

donde $A_i$ es la matriz que reemplaza a la columna $i$-ésima de $A$ por los términos constantes.

**Nota 3** *El sistema de ecuaciones lineales tiene solución única si y sólo si el determinate es diferente de cero.*

## 3. Espacios vectoriales.

### 3.1. Definición de espacio vectorial y ejemplos.

Sea un campo $K$, por ejemplo los números racionales $\mathbb{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$, o los números complejos $\mathbb{C}$.

Entonces:

**Definición 3** *Sea $K$ un campo, un conjunto no vacío $V$, se llama espacio vectorial, donde los elementos de $V$ se llaman vectores, y los de $K$ escalares, si $V$ tiene definida una suma, con $(V, +)$ es un grupo abeliano.*
*Además se define un producto escalar $kv \in V$, donde $k \in K$, y $v \in V$, y se cumplen las siguientes reglas:*

1. *Para todo $k \in K$ y todo $u, v \in V$, $k(u+v) = ku + kv$.*
2. *Para todo $a, b \in K$ y todo $u \in V$, $(a+b)(u) = au + bu$.*
3. *Para todo $a, b \in K$ y todo $u \in V$, $(ab)(u) = a(bu)$.*
4. *Para el escalar $1 \in K$, y todo $u \in V$, $1u = u$.*

Ejemplos:

1. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$.
2. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$.
3. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$.
4. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$.
5. $K = \mathbb{R}$, $V = M_{nm}$.

## 3.2. Espacio $\mathbb{R}^n$ y representación gráfica para $n = 2$ y 3.

Uno de los espacios vectoriales más usado es $\mathbb{R}^n$ sobre los reales $\mathbb{R}$.
Si $n = 2$, entonces tenemos al plano, si $n = 3$ tenemos al espacio.

## 3.3. Subespacios vectoriales.

Un conjunto $W \subset V$ es un subespacio vectorial, si es espacio vectorial por si mismo.

**Un conjunto no vacío $W$ es subespacio si:**

1. $W$ no es vacío.
2. Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
3. Si $u \in W$, y $k \in K$, entonces $ku \in W$.

### 3.4. Combinación lineal y espacio generado.

**Definición 4** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $K$, y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, entonces una combinación lineal de estos vectores con los escalares $a_1, ..., a_n$ es: $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \in V$.*

**Definición 5** *Sea $S$ un subconjunto no vacío de $V$, entonces el subespacio vectorial de todas las combinaciones lineales de vectores en $S$, es el espacio vectorial generado por $S$.*

### 3.5. Independencia lineal.

**Definición 6** *Sea $V$ un espacio vectorial, entonces se dice los los vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, son linealmente dependientes sobre $K$ si existen escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ no todos cero, tal que: $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$ En caso contrario, los vectores se dicen linealmente independientes.*

### 3.6. Bases y dimensión.

**Definición 7** *Un espacio vectorial $V$, tiene dimensión $n$ si existen vectores linealmente independientes $e_1, e_2, ..., e_n \in V$, tales que generan a $V$, de donde al conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se le llama una base de $V$.*

## 4. Producto interno.

### 4.1. Definición, propiedades.

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $K$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Una función $\langle u, v\rangle \mapsto k \in K$. Se llama producto interno si cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle$.
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, (en caso de que $K = \mathbb{C}$.)
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$, y $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Un espacio vectorial que tiene definido un producto interno, se llama "Espacio con producto interno".

**Definición 8** *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$ definimos el producto interno usual como $\langle u, v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$.*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\boxed{|\langle u, v\rangle| \leq \| u \| \| v \| .}$$

## 4.2. Ortogonalidad.

**Definición 9** *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$, se dice que los vectores $u, v$ son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$.*

## 4.3. Norma y sus propiedades.

**Definición 10** *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u \in \mathbb{R}^n$ definimos la norma de $u$ como:*

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

**Definición 11** *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u \in \mathbb{R}^n$, si $\| u \| = 1$, se dice que $u$ es unitario o normalizado.*

**Definición 12** *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$, definimos la distancia entre $u$ y $v$ como*

$$d(u, v) = \| v - u \| .$$

## 4.4. Bases ortogonales y ortonormales.

**Definición 13** *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ es ortogonal si todos los pares de vectores diferentes son ortogonales.*

**Definición 14** *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ se dice ortonormal si*

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

*Donde $\delta_{ij}$ es la delta de Kronecker.*

## 4.5. Proyecciones.

**Definición 15** *La proyección de un vector $u$ en la "dirección"de otro vector $v$, es:*

$$Proy_v u = \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\| v \|^2}\right) v.$$

# 5. Transformaciones lineales.

## 5.1. Definición, propiedades.

**Definición 16** *Sean $V, W$ espacios vectoriales, una transformación lineal $L$ es una función $L : V \to W$, tal que:*

1. $L(u + v) = L(u) + L(v)$.
2. $L(kv) = kL(u)$.

**Proposición 2** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces $L(0) = 0$.*

## 5.2. Recorrido y núcleo.

**Definición 17** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores $v \in V$ tales que $L(v) = 0$, se llama "Kernel" o núcleo de $L$.*

**Definición 18** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores $w \in W$ tales que existe un $v \in V$ y $L(v) = w$, se llama imagen de $L$ o recorrido de $L$.*

**Proposición 3** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el kernel de $L$ es un subespacio vectorial de $W$.*

**Proposición 4** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces $L$ es inyectiva (uno a uno) si y sólo si $ker(L) = \{0\}$.*

**Definición 19** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el rango de $L$ es la dimensión de la imagen de $L$.*

**Definición 20** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces la nulidad de $L$ es la dimensión del núcleo de $L$.*

**Proposición 5** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces $nulidad(L) + rango(L) = dim(V)$.*

**Proposición 6** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces*

1. *Si $L$ es uno a uno, entonces es sobre.*
2. *Si $L$ es sobre, entonces es uno a uno.*

## 5.3. Representación matricial de una transformación lineal.

**Definición 21** *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, $dim(V) = n$, $dim(W) = m$, y sean $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bases de $V$ y $W$ respectivamente. Entonces la matriz $A$ de $L$ es una matriz $(m \times n)$, cuya $j$-ésima columna es el vector $(L(v_j))$. Por lo tanto si $x \in V$, entonces*

$$(L(x))_T = A(x)_S.$$

**Definición 22** *Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una transformación lineal, definido por la matriz $A$, como $L(x) = Ax$.*

**Las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

1. $A$ es no singular.
2. $x = 0$ es la única solución del sistema $Ax = 0$.
3. $A$ es equivalente por filas a $I_n$
4. El sistema $Ax = b$ tiene una única solución.
5. $det(A) \neq 0$.
6. $A$ tiene rango $n$.
7. $A$ tiene nulidad 0.
8. Las filas de $A$ forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.
9. El operador $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $L(x) = Ax$, es uno a uno y sobre.

## 5.4. Vector de coordenadas y cambio de base.

**Definición 23** *Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base del espacio vectorial $V$, y $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ otra base. Supongamos que:*

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + \cdots + a_{1n}e_n \\
f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + \cdots + a_{2n}e_n \\
f_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 + \cdots + a_{3n}e_n \\
&\vdots \\
f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + a_{n3}e_3 + \cdots + a_{nn}e_n
\end{aligned}$$

*Entonces la matriz transpuesta $P$ de los coeficientes se llama matriz de cambio de base:*

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 5.5. Transformaciones lineales inversas.

**Definición 24** *Sea $L : V \to V$, una transformación lineal, la transformación lineal $L^{-1}$ es la inversa de $L$, si $L(L^{-1}) = I$.*

## 5.6. Vectores y valores propios.

**Definición 25** *Sea $A$ una matriz $n \times n$, y $L$ la transformación lineal dada por $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, entonces un valor propio de $A$ es un número real $\lambda$ y un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que:*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

*El vector $\boldsymbol{x}$ se llama vector propio de $A$.*

**Proposición 7** *Una matriz $A$ $n \times n$, es no invertible (singular) si y sólo si $0$ es un valor propio de $A$.*

## 5.7. Diagonalización de una matriz.

**Definición 26** *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. El determinante de la matriz $\det(\lambda I_n - A)$ le llamaremos el polinomio característico de $A$.*

**Proposición 8** *Los valores propios de $A$ son las raíces del polinomio característico de $A$.*

**Definición 27** *Se dice que una matriz $B$ es semejante o similar a una matriz $A$, si existe una matriz no singular (invertible) $P$, tal que:*

$$B = P^{-1}AP.$$

**Definición 28** *Se dice que una matriz $B$ diagonalizable si es similar a una matriz diagonal.*

**Proposición 9** *Las matrices similares tienes los mismos valores propios.*

**Proposición 10** *Una matriz $A$ $n \times n$, es diagonalizable si y sólo si tiene $n$ vectores propios linealmente independientes.*

**Proposición 11** *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz $A$ $n \times n$, son distintas, entonces $A$ es diagonalizable.*

## Referencias

[1] B. Kolman, D.R. Hill, *"Álgebra Lineal"*. Pearson, Printice Hall, Octava edición 2006.

[2] S.I. Grossman, *" Álgebra lineal"*. Quinta edición. México: MacGraw-Hill(1966).

[3] J. B. Fraleigh, *"Álgebra lineal"*. México : Addison-Wesley iberoamericana,(1989).

[4] S. Lang, , *"Introducción al álgebra lineal"*. Argentina : Addison-Wesley iberoamericana, (1990).

[5] C. L. David, *"Álgebra Lineal y sus aplicaciones"*. Segunda edición actualizada. México: Pearson Education de México S.A. de C.V.(2001).

[6] H. Antón, *" Introducción al álgebra lineal"*. Tercera edición. México: Limusa (1988).

[7] S. Lipschutz, *" Álgebra lineal"*. Serie Schaum: Mcgraw-hill (1970).

[8] http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/