Matrices

Grupos de Matrices

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1. Grupos de Matrices **2**

1.1. Grupo lineal general 2

1.2. Grupo de matrices diagonales 2

1.3. Grupo de matrices triángulares superior 3

1.4. Grupo de rotaciones 3

1.5. Grupo diédrico 3

1
Grupos de Matrices

1.1. Grupo lineal general

El grupo lineal general sobre $\mathbb{Z}_2$ $GL(2,\mathbb{Z}_2)$, formado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Grupo de matrices diagonales

El grupo de matrices diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

1.3. Grupo de matrices triángulares superior

Grupo de matrices triángulares superior:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.4. Grupo de rotaciones

Grupo de rotaciones:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.5. Grupo diédrico

Grupo diédrico:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, R^2, RS, R^2S.$$

1.6. Problemas

Problemas:

1. Mostrar que las matrices 2×2 con determinante 1, forman un grupo no abeliano.
2. Considere las matrices: $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ demostrar que forman un grupo abeliano, llamado grupo de Cayley.

3. Demostrar que el conjunto de matrices ortogonales forman un grupo. Una matriz es ortogonal si $A^{-1} = A^T$.

4. Demostrar que las matrices 3×3 de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forman un grupo, llamado grupo de Heisenberg.

5. Mostrar que las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ forma un grupo.

6. Mostrar que las matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ forma un grupo, donde α, β son números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.