

MathCon

The Mathematics Firm

Matrices

Definiciones básicas de matrices

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2009



Contenido

1. Matrices	2
1.1. Matrices cuadradas	4
1.2. Matriz transpuesta	4
1.3. Matriz identidad	5
1.4. Matriz diagonal	6
1.5. Matriz triángular	6
1.6. Matrices binarias	6
2. Operaciones entre matrices	8
2.1. Suma entre matrices	8
2.2. Producto por un escalar	9
2.3. Producto de matrices	10
3. Matriz inversa	13
3.1. Obtención de la matriz inversa por medio de Operaciones Elementales	13
4. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices	22

Matrices

Definición 1 Una matriz real es una función A de $[1, \dots, n] \times [1, \dots, m]$, al conjunto de los números reales \mathbb{R} , y decimos que A tiene orden $n \times m$

Una matriz A se representa con todos sus valores de manera usual como un arreglo de n filas y m columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También la podemos representar como $A = (a_{ij})$, donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Ejemplos de matrices:

1. Ejemplo de una matriz 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Como función la matriz anterior se escribe $A : [1, \dots, n] \times [1, \dots, m] \rightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\mapsto a_{11} \\ (1, 2) &\mapsto a_{12} \\ (2, 1) &\mapsto a_{21} \\ (2, 2) &\mapsto a_{22} \end{aligned}$$

2. Ejemplo de una matriz 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Como función se escribe $A : [1, \dots, 3] \times [1, \dots, 3]$, donde:

$$\begin{aligned} (11) &\mapsto a_{11} \\ (12) &\mapsto a_{12} \\ (13) &\mapsto a_{13} \\ (21) &\mapsto a_{21} \\ (22) &\mapsto a_{22} \\ (23) &\mapsto a_{23} \\ (31) &\mapsto a_{31} \\ (32) &\mapsto a_{32} \\ (33) &\mapsto a_{33} \end{aligned}$$

3. Ejemplo de una matriz 3×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

4. Ejemplo de una matriz 2×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

5. Ejemplo de una matriz 1×3 : $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$

6. Ejemplo de una matriz 3×1 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices:

Definición 2 *Dos matrices A, B del mismo orden $n \times m$ son iguales si y sólo si, son iguales como funciones. Es decir si son iguales entrada por entrada:*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

1.1. Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Éste conjunto de matrices suele escribirse como M_n . Las matrices cuadradas tienen propiedades particulares.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Matriz transpuesta

Dada una matriz A se define la matriz transpuesta A^T (la transpuesta), como aquella que cambia las filas por columnas, o las columnas por filas, es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } A^T = (a_{ji})$$

Para una matriz en M_3 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:

1. $(A^T)^T = A$, la transpuesta de una transpuesta es igual a la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A^T)^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, la transpuesta de una suma, es la suma de las transpuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+B} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A+B)^T} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. $(AB)^T = B^T A^T$, la transpuesta de un producto es el producto conmutado de las transpuestas .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(AB)^T} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$

4. $(rA)^T = rA^T$, la transpuesta de un producto escalar es el producto escalar de la transpuesta.

5. Si $A = A^T$, la matriz se llama simétrica.

6. Si $A^T = -A$, la matriz se llama antisimétrica.

1.3. Matriz identidad

En M_n existe la matriz identidad, que consiste en una matriz con unos en la diagonal (es decir donde $i = j$) y ceros en otro lugar (o sea donde $i \neq j$).

Por ejemplo en M_3 ,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Formalmente } I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

1.4. Matriz diagonal

La matriz es diagonal si tiene valores cero fuera de la diagonal. En la diagonal es posible tener ceros o no.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.5. Matriz triángular

Una matriz es triángular superior, si tiene valores cero abajo de la.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i > j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es triángular inferior, si tiene valores cero arriba de la diagonal.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i < j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.6. Matrices binarias

Una matriz es binaria, si sus entradas toman sólo dos valores diferentes, podemos tomar los valores de 0, 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices binarias tienen varias aplicaciones, los valores 0, 1 representan elementos de un campo finito de dos elementos, esto quiere decir que los elementos 0, 1 se pueden multiplicar y sumar, y en ambos casos forman un grupo Abelian.

Es decir:

$$+ : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\begin{array}{l} 0 + 0 \mapsto 0 \\ 0 + 1 \mapsto 1 \\ 1 + 0 \mapsto 1 \\ 1 + 1 \mapsto 0 \end{array}$$

Para esta suma:

1. La suma es conmutativa.
2. La suma es asociativa.
3. Existe el neutro aditivo, 0.
4. Existe el inverso aditivo, $-a$.

$$\cdot : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 \mapsto 0 \\ 0 \cdot 1 \mapsto 0 \\ 1 \cdot 0 \mapsto 0 \\ 1 \cdot 1 \mapsto 1 \end{array}$$

Para este producto:

1. El producto es conmutativo.
2. El producto es asociativo.
3. Existe el neutro multiplicativo, 1.
4. Existe el inverso multiplicativo, a^{-1} .

Operaciones entre matrices

2.1. Suma entre matrices

La suma está definida sólo para matrices del mismo orden, es decir, sólo se puede sumar una matriz de orden $n \times m$ con otra de orden $n \times m$. La suma se realiza entrada por entrada, es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ y } B = (b_{ij}), \text{ entonces } A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplos de suma de matrices:

1. Una matriz de orden 2×2 más otra del mismo orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) + (-1) & (2) + (0) \\ (3) + (2) & (4) + (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz de orden 3×2 más otra del mismo orden 3×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3 .

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz 3×3 sumada con otra del mismo orden 3×3 .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Las matrices con la suma forman un grupo Abelian, es decir:

1. La suma de matrices es conmutativa, $A + B = B + A$.
2. La suma de matrices es asociativa, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Existe la matriz (neutro aditivo) cero, tal que $A + 0 = 0 + A = A$.
4. Para toda matriz A , existe (inverso aditivo) la matriz $-A$.

2.2. Producto por un escalar

El producto de un escalar (número real) r por una matriz rA , se define de la forma natural, es decir, multiplicar cada entrada de A por el número r . El orden de A puede ser cualquiera.

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } rA = (ra_{ij})$$

Ejemplos

1. Una matriz 2×2 por $r = 3$.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 3×2 por $r = 2$.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 3×3 por r .

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

2.3. Producto de matrices

El producto de matrices esta definido, entre A , matriz de orden $n \times p$, por B de orden $p \times m$. Dando como resultado C de orden $n \times m$

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ y } B = (b_{ij}), \text{ entonces } C = (c_{ij}) \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik})(b_{kj}).$$

Ejemplos de producto de matrices:

1. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (3)(2) \\ (1)(3) + (2)(4) & (0)(3) + (3)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

El proceso es el siguiente:

- a) Se multiplica la primera fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

- b) Se avanza de fila y se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & - \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & - \end{pmatrix}$$

- c) De manera similar se multiplica la primera fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ (1)(3) + (2)(4) & - \end{pmatrix}$$

d) Avanzando de fila finalmente, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (3)(2) \\ (1)(3) + (2)(4) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-3) + (-1)(5) & (3)(-3) + (4)(5) \\ (-2)(1) + (-1)(2) & (3)(1) + (4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1) + (1)(1) & (2)(1) + (1/2)(1) \\ (-1)(2) + (1)(-1) & (2)(2) + (1/2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz 2×3 por otra de orden 3×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)(1) + (0)(3) + (3)(5) & (1)(1) + (1/2)(3) + (-2)(5) \\ (-1)(2) + (0)(4) + (3)(6) & (1)(2) + (1/2)(4) + (-2)(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -15/2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz A , 3×3 por otra B de orden 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Resumiendo:

1. La suma de matrices forma un grupo Abelian, es decir, es conmutativa, es asociativa, existe la matriz cero 0 , y para toda matriz A , existe la matriz inversa aditiva $-A$.
2. Para el producto de matrices: éste NO es conmutativo, si es asociativo, existe la matriz neutra I (para matrices cuadradas), y NO para toda matriz A , existe su matriz inversa multiplicativa A^{-1} .

Matriz inversa

Una matriz cuadrada A tiene inversa, si existe la matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Se dice también que A es invertible o no singular.

Observación: No siempre existe la matriz inversa.

3.1. Obtención de la matriz inversa por medio de Operaciones Elementales

La matriz inversa de una matriz A se puede obtener aplicando un método similar al método de Gauss-Jordan para resolver SEL.

Operaciones elementales sobre filas de matrices.

1. Cambio de dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante.
3. Sumar el múltiplo de una fila a otra fila.

Sea A una matriz, entonces existe la inversa A^{-1} , si se puede calcular por el siguiente procedimiento.

1. Considere la matriz $(A|I)$, que significa juntar a A la matriz identidad I .
2. Aplicar las operaciones elementales a las filas de A suficientes para convertirla en la matriz I .
3. Las mismas operaciones elementales hay que aplicarlas (al mismo tiempo) a I adjuntada.

4. La matriz de la derecha que resulte de 3, es la matriz inversa $(I|A^{-1})$.

Observación: si no es posible aplicar este método, entonces la matriz inversa no existe.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Adjuntar a A la matriz identidad I , $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_2 = -3F_1 + F_2$

$$\begin{array}{cc|cc} -3F_1 = & -3 & -6 & -3 & 0 \\ F_2 = & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = F_2 + F_1$

$$\begin{array}{cc|cc} F_2 = & 0 & -2 & -3 & 1 \\ F_1 = & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right)$.

f) Finalmente $F_2 = \frac{1}{-2}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 6/2-4/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + F_2$

$$\begin{array}{r|l} -2F_1 = & -2 & 2 & | & -2 & 0 \\ F_2 = & 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & 3 & | & -2 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = F_2 + 3F_1$

$$\begin{array}{r|l} F_2 = & 0 & 3 & | & -2 & 1 \\ 3F_1 = & 3 & -3 & | & 3 & 0 \\ \hline F_1 = & 3 & 0 & | & 1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right)$.

f) Finalmente $F_1 = \frac{1}{3}F_1$, $F_2 = \frac{1}{3}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{array} \right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 2/3 & 1/3 - 1/3 \\ 2/3 - 2/3 & 2/3 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3 Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + 5F_2$

$$\begin{array}{r|l} -2F_1 = & -10 & -6 & | & -2 & 0 \\ 5F_2 = & 10 & 10 & | & 0 & 5 \\ \hline F_2 = & 0 & 4 & | & -2 & 5 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = -3F_2 + 4F_1$

$$\begin{array}{r|l} -3F_2 = & 0 & -12 & | & 6 & -15 \\ 4F_1 = & 20 & 12 & | & 4 & 0 \\ \hline F_1 = & 20 & 0 & | & 10 & -15 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right)$.

f) Finalmente $F_1 = \frac{1}{20}F_1, F_2 = \frac{1}{4}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 5/4 \end{array} \right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\left(\begin{array}{cc} 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 5/4 \end{array} \right)$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 - 3/2 & -15/4 + 15/4 \\ 2/2 - 2/2 & -6/4 + 10/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + F_2$

$$\begin{array}{cc|cc} -2F_1 = & -2 & -2 & -2 & 0 \\ F_2 = & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$.

d) En este caso no se puede aplicar el método, por lo tanto la matriz inversa NO existe. Observemos que F_2 es múltiplo de F_1 .

Ejemplo 5 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_2 = -F_1 + F_2$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_1 = & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ F_2 = & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$

d) Aplicar ahora $F_3 = F_2 + F_3$

$$\begin{array}{ccc|ccc} F_2 = & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ F_3 = & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$

f) Ahora;

$$F_2 = F_3 + F_2$$

$$F_1 = -3F_3 + F_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -3F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ F_2 = & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & F_1 = & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 & F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \end{array}$$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$

h) Ahora;

$$F_1 = 2F_2 + F_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2F_2 = & 0 & -2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

i) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$

j) Por último

$$F_2 = -F_2$$

k) Finalmente obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

l) Comprobando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 1-4+3 & -1-2+3 \\ 2-2 & 1-2+2 & -1-1+2 \\ 2-2 & -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

b) Aplicar $F_3 = -F_1 + F_3$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_1 = & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ F_3 = & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

d) Aplicar ahora:

$$F_2 = -3F_3 + F_2$$

$$F_1 = -3F_3 + F_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 \\ F_2 = & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ F_1 = & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ \hline -3F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 \\ F_1 = & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

f) Ahora;

$$F_1 = -F_2 + F_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_2 = & 0 & -2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

h) Por último

$$F_2 = F_2/2$$

i) Finalmente obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) Comprobando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-3 & -1+1+0 & 0-3+3 \\ 0+3-3 & 0+1+0 & 0-3+3 \\ 1+3-4 & -1+1+0 & 0-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1} , y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$

b) Aplicar $F_2 = -F_1 + F_2$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_1 = & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ F_2 = & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$

d) Aplicar $F_3 = -F_2 + F_3$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -F_2 = & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ F_3 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$

f) Aplicar ahora:

$$F_2 = 2F_3 + F_2$$

$$F_1 = F_3 + F_1$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe la matriz inversa.
2. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.

4

Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices

Un sistema de ecuaciones lineales, ya sea homogéneo o no homogéneo puede ser escrito mediante matrices.

Definición 3 Considere el siguiente sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

donde las constantes $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{12}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, y las incógnitas x_1, \dots, x_n representan también números reales.

Entonces tenemos la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Proposición 1 *El sistema de ecuaciones lineales SEL $Ax = b$ tiene una única solución, si y sólo si la matriz A tiene inversa. En este caso la solución es $x = A^{-1}b$.*

Ejemplos:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales (cuadrado) por medio de la matriz inversa.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

Usando la representación de operaciones e igualdad entre matrices, nuestro sistema de ecuaciones lineales, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Que tiene la forma:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por la izquierda por A^{-1} . Obtenemos que la solución del sistema, es:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos las siguientes equivalencias:

1. Existe la matriz inversa.
2. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.
3. El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene como única solución a la trivial.
4. El sistema $Ax = b$, tiene una única solución.