

# MathCon

*The Mathematics Firm*

## Matrices

Ejercicios abstractos sobre matrices

**[www.math.com.mx](http://www.math.com.mx)**

José de Jesús Angel Angel  
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2012

# Contenido

1. Matrices

2

# 1

## Matrices

Resolver los siguientes problemas.

1. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  Expresar la matrix en función de  $i, j$ .

Solución:  $A = (x_{ij})$  donde  $x_{ij} = i$

2. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  Expresar la matrix en función de  $i, j$ .

3. Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  Expresar la matrix en función de  $i, j$ .

4. Sea  $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  Expresar la matrix en función de  $i, j$ .

5. Escribir una matrix  $3 \times 3$  definida como  $(x_{ij}) = i^2 + j^2$ .

6. Escribir una matrix  $3 \times 3$  definida como  $(x_{ij}) = (-1)^{i-j}$ .

7. Escribir una matrix  $3 \times 3$  definida como  $(x_{ij}) = \begin{cases} e^{i-j} & \text{Si } i \geq j \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$

8. Escribir una matriz  $3 \times 3$  definida como  $(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i + j \text{ es par.} \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$
9. Escribir una matriz  $n \times n$  definida como  $(x_{ij}) = \begin{cases} -1 & \text{Si } i > j. \\ 0 & \text{Si } i = j. \\ 1 & \text{Si } i < j. \end{cases}$
10. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , resolver las ecuaciones:
- $3(X + 1/2A) = 2(X - B)$ .
  - $X + A = XB$ .
  - $X - B = XB + XA$ .
11. ¿Es cierta la siguiente igualdad  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  para matrices ?
12. Qué muestra la siguiente igualdad
- $$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
13. Encontrar todas las soluciones de la ecuación  $X^2 = -I_2$ .
14. Mostrar que para matrices  $2 \times 2$   $A, B$  la suma de la diagonal de  $AB - BA = 0$ .
15. Para  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ ,  $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$
16. Si  $A, B$  son matrices  $n \times n$ , definimos el producto de Lie como  $[AB] = AB - BA$ , mostrar que:
- $[[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = 0$ .
  - $[(A + B)C] = [AC] + [BC]$ .
17. Probar que si  $A_x = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$ , entonces  $A_x A_y = A_{x+y}$ .
18. Si una matriz  $A$  cumple que  $AA^t = A^t A = I$ , se llama matrix ortogonal. Mostrar que:
- Si  $A, B$  son ortogonales, entonces  $AB$  es ortogonal.
  - Las matrices ortogonales  $2 \times 2$  son de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  o  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  donde  $a^2 + b^2 = 1$ .
19. Mostrar que hay un isomorfismo entre los números complejos  $\mathbb{C}$  y las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

20. Mostrar que si  $AB = BA$ , entonces  $A^{-1}B = BA^{-1}$ , y también conmutan  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$ .

21. Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

22. Encontrar todas las matrices que conmutan con:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Mostrar que el producto de dos matrices triangulares (del mismo tipo, superior o inferior) es también una matriz triangular del mismo tipo.

24. Mostrar que la matriz inversa de una matriz triangular es también triangular del mismo tipo.

25. Encontrar  $A^n$ , si  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. Si la matriz  $A$  de orden 5, esta definida por:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i + j = 5 + 1 \\ 0 & \text{Si } i + j \neq 5 + 1 \end{cases}$$

Probar que  $A^T = A$  y  $A^2 = I$ .

27. Si la matriz  $A$  de orden 6, esta definida por:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j - 1 \\ -1 & \text{Si } i = 6, j = 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Probar que  $A^6 = -I$ .

28. Encontrar la raíz cuadrada de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Encontrar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y mostrar que } (A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}.$$

30. Verificar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Si  $A$  es una matriz que satisface  $I + A + A^2 + \dots + A^k = 0$  entonces  $A^{-1} = A^k$

32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostrar que  $A^T = B$  y  $A^{-1} = B$ . Hacer una correspondencia de  $A$  con la permutación  $(2, 4, 3, 1)$  y  $B$  con  $(4, 1, 3, 2)$ . Verificar que las permutaciones son también inversas.