MathCon

The Mathematics Firm

Matrices

Ejercicios abstractos sobre matrices

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1

Matrices

Resolver los siguientes problemas.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Expresar la matrix en función de i, j.

   Solución: $A = (x_{ij})$ donde $x_{ij} = i$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Expresar la matrix en función de i, j.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Expresar la matrix en función de i, j.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ Expresar la matrix en función de i, j.

5. Escribir una matrix 3×3 definida como $(x_{ij}) = i^2 + j^2$.

6. Escribir una matrix 3×3 definida como $(x_{ij}) = (-1)^{i-j}$.

7. Escribir una matriz 3×3 definida como $(x_{ij}) = \begin{cases} e^{i-j} & \text{Si } \ i \geq j \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$

8. Escribir una matriz 3×3 definida como $(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \ i+j \text{ es par.} \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$

9. Escribir una matriz $n \times n$ definida como $(x_{ij}) = \begin{cases} -1 & \text{Si } \ i > j. \\ 0 & \text{Si } \ i = j. \\ 1 & \text{Si } \ i < j. \end{cases}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver las ecuaciones:

    a) $3(X + 1/2A) = 2(X - B)$.

    b) $X + A = XB$.

    c) $X - B = XB + XA$.

11. ¿ Es cierta la siguiente igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ para matrices ?

12. Qué muestra la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $X^2 = -I_2$.

14. Mostrar que para matrices 2×2 A, B la suma de la diagonal de $AB - BA = 0$.

15. Para $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

16. Si A, B son matrices $n \times n$, definimos el producto de Lie como $[AB] = AB - BA$, mostrar que:

    a) $[[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = 0$.

    b) $[(A+B)C)] = [AC] + [BC]$.

17. Probar que si $A_x = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$, entonces $A_x A_y = A_{x+y}$.

18. Si una matriz A cumple que $AA^t = A^t A = I$, se llama matrix ortogonal. Mostrar que:

    a) Si A, B son ortogonales, entonces AB es ortogonal.

    b) Las matrices ortogonales 2×2 son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ donde $a^2+b^2 = 1$.

19. Mostrar que hay un isimorfismo entre los números complejos $\mathbb{C}$ y las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

20. Mostrar que si $AB = BA$, entonces $A^{-1}B = BA^{-1}$, y tambien conmutan A^-1 y B^{-1}.

21. Calcular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

22. Encontrar todas la matrices que conmutan con: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Mostrar que el producto de dos matrices triángulares (del mismo tipo, superior o inferior) es también una matriz triángular del mismo tipo.

24. Mostrar que la matriz inversa de una matriz triángular es también triángular del mismo tipo.

25. Encontrar A^n, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. Si la matriz A de orden 5, esta definida por:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad i + j = 5 + 1 \\ 0 & \text{Si} \quad i + j \neq 5 + 1 \end{cases}$$

    Probar que $A^T = A$ y $A^2 = I$.

27. Si la matriz A de orden 6, esta definida por:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad i = j - 1 \\ -1 & \text{Si} \quad i = 6, \ j = 1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

    Probar que $A^6 = -I$.

28. Encontrar la raíz cuadrada de la matriz:
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

29. Encontrar la matriz inversa de
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y mostrar que $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$.

30. Verificar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Si A es una matriz que satisface $I + A + A^2 + \cdots + A^k = 0$ entonces $A^{-1} = A^k$

32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostrar que $A^T = B$ y $A^{-1} = B$. Hacer una correpondencia de A con la permutación $(2, 4, 3, 1)$ y B con $(4, 1, 3, 2)$. Verificar que las permutaciones son también inversas.