MathCon

The Mathematics Firm

Determinantes

Ejercicios sobre determinantes

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Determinantes 3 $\times$ 3

Mostrar que el determinante de las siguientes matrices es cero.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -6 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Mostrar que el determinante de las siguientes matrices es 1.

11. $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -9 \\ -1 & -9 & -5 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -3 & -8 & -6 \\ -8 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 7 & 6 & -8 \\ 6 & 9 & -8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -9 & 8 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 6 \\ 4 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & -3 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -5 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 \\ -7 & 6 & -6 \\ -5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

Qué valor debe ser a para que la matriz sea singular.

21. $A = \begin{pmatrix} 4 & -a & -5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Solución: $a = 5$

22. $A = \begin{pmatrix} -a & 4 & -3 \\ a & 0 & a \\ -a & -2 & -4 \end{pmatrix}$ Solución: $a = 0, a = \frac{11}{3}$

23. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 1 & -a & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $a = 0, a = \frac{1}{2}$

24. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -5 \\ 3 & 3 & -a \\ -1 & -4 & -a \end{pmatrix}$ Solución: $a = -\frac{3\sqrt{5}}{2}, a = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

25. $A = \begin{pmatrix} -a & 5 & 1 \\ -a & -a & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ Solución: $a = -6, a = -1$

26. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & a \\ -a & 3 & -5 \\ 4 & 4 & a \end{pmatrix}$ Solución: $a = -3, a = 0$

27. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -3 \\ a & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ Solución: $a = \frac{9}{4}, a = 0$

28. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -a \\ 2 & a & a \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Solución: $a = -3, a = -3$

29. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & a \\ a & -2 & -5 \end{pmatrix}$ Solución: $a = -2 - 3\sqrt{3}, a = -2 + \sqrt{3}$

30. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -4 & -a & -1 \\ -a & -4 & -a \end{pmatrix}$ Solución: $a = 2(3 - \sqrt{19}), a = 2(3 + \sqrt{19})$

2

Determinantes 4×4

Calcular los siguientes determinantes.

31. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 4$

32. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 2$

33. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 2$

34. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -1$

35. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -2$

36. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1$

37. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1$

38. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 2$

39. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -6$

40. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -7$

41. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1 + a$

42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 2a$

43. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = a^2$

44. $A = \begin{pmatrix} a & -a & a & a \\ -1 & 1 & -a & a \\ 0 & 0 & -a & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -2a^4$

45. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & a \\ -a & a & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1 + 5a^2$

46. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & -1 \\ a & a & 0 & -a \\ -a & a & -a & a \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -3a^2 + a^3$

47. $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -a & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = a - 3a^2$

48. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & -a & -a & -a \\ -a & -a & a & 0 \\ a & 0 & a & -a \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 6a^4$

49. $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & -a \\ a & 0 & 0 & -a \\ 1 & -1 & -a & -1 \\ -a & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -4a^3$

50. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -a & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 \\ a & a & -a & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1 - a^2$

Verificar que los siguientes determinantes son cero.

51. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & -a \\ -a & 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -a & -a \end{pmatrix}$

52. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

53. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

54. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -a \\ -1 & 0 & -1 & a \\ a & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$

55. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & a \\ a & 0 & a & 1 \\ a & 0 & 0 & -a \\ -a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular los siguientes determinantes.

56. $A = \begin{pmatrix} x-4 & 3 & -5 \\ 0 & x-4 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-5)(x-4)(x+4)$

57. $A = \begin{pmatrix} x+3 & -1 & -3 \\ 1 & x & -4 \\ -3 & -1 & x+3 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x+6)(x^2-3)$

58. $A = \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 3 & x-1 & 0 \\ 5 & -3 & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-2)(x^2+2)$

59. $A = \begin{pmatrix} x+3 & 2 & -2 \\ 1 & x+4 & 2 \\ -2 & -4 & x+1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x+2)(x+3)^2$

60. $A = \begin{pmatrix} x-4 & -4 & -4 \\ -4 & x & -2 \\ 5 & 5 & x+5 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-2)(x+3)(x)$

61. $A = \begin{pmatrix} x+3 & -1 & -1 \\ 0 & x-5 & 5 \\ 0 & 2 & x+4 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-6)(x+3)(x+5)$

62. $A = \begin{pmatrix} x+4 & 5 & -2 \\ -2 & x-2 & 2 \\ -3 & 1 & x+5 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-1)(x+2)(x+6)$

63. $A = \begin{pmatrix} x+1 & -2 & 2 \\ 4 & x+3 & 4 \\ -2 & 1 & x-3 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-1)(x+1)^2$

64. $A = \begin{pmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ 2 & x+2 & 0 \\ -2 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x+1)(x+2)^2$

65. $A = \begin{pmatrix} x-2 & -5 & -4 \\ 0 & x+3 & 4 \\ 2 & 2 & x+5 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-2)(x+3)(x+5)$

3

Determinantes de mayor orden

Calcular los siguientes determinantes.

66. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 0$

67. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 0$

68. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 0$

69. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 0$

70. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 0$

4

Problemas varios de determinantes

Calcular los siguientes determinantes.

71. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = n!$

72. $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

73. Mostrar que:

$$\begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix} = (mq - np) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

74. $A = \begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -2(x^3 + y^3)$

75. $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = x^2 z^2$

76. $A = \begin{pmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{pmatrix}$ Solución: $\sin(c-a)\sin(c-b)\sin(a-b)$

77. $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_+ b_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = b_1 b_2 b_3$

78. $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1 & x & x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

79. $A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-b_4 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 1$

80. $A = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

81. $A = \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (x+3a)(x-a)^3$

82. $A = \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ -a & x & a & a \\ -a & -a & x & a \\ -a & -a & -a & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = \dfrac{(x+a)^4(x-a)^4}{2}$

83. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (-1)(3x^2)$

84. $A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = x^4 - y^4$

85. $A = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = \dfrac{a^5 - b^5}{a - b}$

86. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = 5$

87. $A = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = \dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$

88. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = \cos 4\theta$

89. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = (a^2 - b^2)^3$

90. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Solución: $det(A) = -2(3)!$