MathCon

The Mathematics Firm

Determinantes

Definiciones básicas sobre determinantes

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1 Determinantes

El determinante de una matriz A, es una función del conjunto de matrices cuadradas M_n a los reales,

$$Det(A) : M_n \to \mathbb{R}$$

Se puede escribir como $Det(A)$ o como $|A|$.

Definimos primero los determinantes para matrices de orden 2.

Definición 1 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*, entonces su determinate es*

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejercicios:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = 4 - 6 = -2$.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = 1 - (-2) = 3$.
3. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = 10 - 6 = 4$.
4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = 2 - 2 = 0$.
5. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ra & rb \end{pmatrix}$, entonces $|A| = rab - rab = 0$.

Observación: En una matriz 2×2, si una fila o columna es múltiplo de la otra, entonces el determinante es cero.

Definición 2 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, *su determinate es*

$$det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejercicios:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, el determinate es
   $|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2(2) + 3(1) = -4 + 3 = -1$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, el determinate es
   $|A| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
   $= 1(15 - 12) - 2(-5 - 12) + 3(-2 - 6) = 3 + 34 - 24 = 13.$

Observación: Un determinante 3×3, se puede calcular en base a cualquier fila o columna. La regla anterior toma como base la primera fila, para tomar como base otra fila o columna, debemos de asignar un signo $\pm$, en función de la entrada, a la entrada a_{ij} le asignamos el signo $(-1)^{i+j}$, es decir si la suma $i+j$ es par el signo es $+$, si $i+j$ es impar, el signo es $-$.

Determinante en base a la primera columna:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Determinante en base a la segunda columna:

$$|A| = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}.$$

1.1. Propiedades de determinantes.

1. $|A| = |A^T|$.
2. Si B se obtiene de A, intercambiando dos filas(columnas), entonces $|B| = -|A|$.
3. Si dos filas (columnas) de A, son iguales, entonces $|A| = 0$.
4. Si una fila (columna) tiene solo ceros, entonces $|A| = 0$.
5. Si B se obtiene de A, multiplicando una fila (columna) de A por una constante r, entonces $|B| = r|A|$.
6. Si B se obtiene de A, cambiando la fila (columna) $F_i = rF_j + F_i$, entonces $|B| = |A|$.
7. $|AB| = |A||B|$.
8. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Ejercicios:

1. Calcular los siguientes determinantes:

   a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -8 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Si $|A| = 2, |B| = -3$, calcular $|A^{-1}B|, |A^T B^{-1}|, |AB|$.

3. Si A es una matriz $n \times n$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces mostrar que $|cA| = c^n A$.

4. Demuestre que si $|AB| = 0$, entonces $|A| = 0$, o $|B| = 0$.

5. Demuestre que si en una matriz A en cada fila y en cada columna solo un elemento no es cero, entonces $|A| \neq 0$.

6. Demuestre que si $A = A^{-1}$, entonces $|A| = \pm 1$.

7. Si A es una matriz no singular, y $A^2 = A$, entonces $|A| = 1$.

8. Si P es una matriz no singular, y $B = PAP^{-1}$, entonces $|A| = |B|$.

9. Si $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$, calcular

a) $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} b_1 & 2b_2 & b_3 \\ 3a_1 & 6a_2 & 3a_3 \\ c_1 & 2c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

c) $\begin{vmatrix} a_2 & 2a_2 & a_3 \\ b_2+a_2 & 2b_1+2a_1 & b_3+a_3 \\ c_2 & 2c_1 & c_3 \end{vmatrix}.$

10. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$

11. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x+1 \end{vmatrix}$

12. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+3 & x \\ x & x & x & x+4 \end{vmatrix}$

13. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1/2 & x & x \\ x & x & x+1/3 & x \\ x & x & x & x+1/4 \end{vmatrix}$

14. Calcular el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x & x \\ x & x+a & x & x & x \\ x & x & x+a^2 & x & x \\ x & x & x & x+a^3 & x \\ x & x & x & x & x+a^4 \end{vmatrix}$

2

Inversa por determinantes.

Sea A una matriz $n \times n$, y $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A)) = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta $Adj(A)$ de $A = (a_{ij})$ es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores A_{ij}, donde $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, y $|M_{ij}|$ es el menor de a_{ij}, que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

Ejercicios:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, Ahora calculemos a los cofactores, donde cada $|M_{ij}|$ se obtiene de eliminar la fila i y la columna j.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, los cofactores quedan como:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

O sea:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 8 & A_{12} = -4 & A_{13} = 1 \\ A_{21} = 2 & A_{22} = -2 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = -4 & A_{32} = 2 & A_{33} = -1 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte el determinante puede ser calculado por cualquier fila o columna (se recomienda por aquella que tenga la mayor cantidad de ceros), por ejemplo por la primera fila, tenemos:

$|A| = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 2 = -2$

Finalmente la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}Adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontrar las inversas de las siguientes matrices.

1. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3

Regla de Cramer.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $n \times n$:

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
& \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Entonces la regla de Cramer nos permite encontrar las soluciones x_i, directamente por la fórmula:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz que reemplaza a la columna i-ésima de A por los términos constantes b_i.

Ejercicios:

1. Sea el siguiente SEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

Entonces por la regla de Cramer, tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{22}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{5}$$

Resolver los siguientes SEL usando la regla de Cramer.

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 2 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -5 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & 2z & = & -4 \\ & & 2y & + & z & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & z & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & & & + & z & = & 4 \end{array}$$

Observación 1 *El sistema de ecuaciones lineales tiene solución única si y sólo si el determinate es diferente de cero.*

Ahora tenemos las siguientes equivalencias:

1. El determinante de A es diferente de cero.
2. A es no singular.
3. Existe la matriz inversa A^{-1}.
4. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.
5. El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ tiene como única solución a la trivial.
6. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tiene una única solución.
7. Baja la transformación lineal $A\mathbf{x}$, la imagen inversa de cualquier vector $\mathbf{b}$, en no vacía y consiste de un solo elemento. Es decir Ax es sobre.
8. Bajo la transformación lineal $A\mathbf{x}$ la imagen inversa del cero, es no vacía, y consiste únicamente de $\mathbf{x} = 0$.