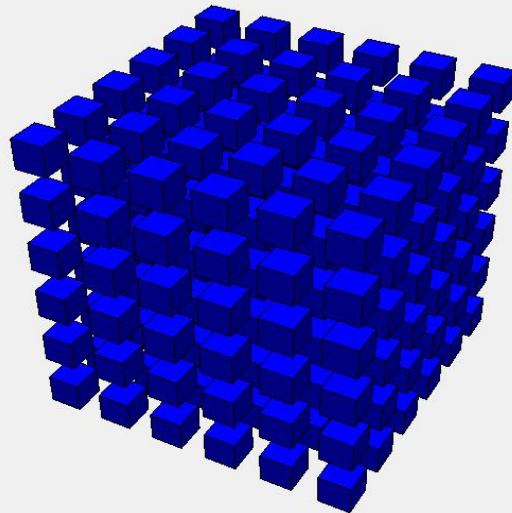


MathCon

The Mathematics Firm

Ecuaciones Geométricas

Aplicación de los determinantes al cálculo de ecuaciones que describen lugares geométricos



www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2011

Capítulo 1

Línea Recta

1.1. Introducción

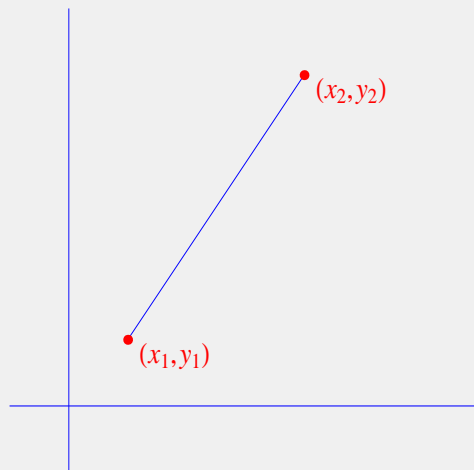
Una línea recta tiene una ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

donde a, b, c no son todos cero.

Por otro lado una línea recta está determinada por dos puntos $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$, que satisfacen la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$



Juntando las tres ecuaciones tenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, donde ahora las incógnitas son a, b, c .

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

Como a, b, c no todos son ceros, entonces existen soluciones no triviales si el determinante asociado es cero.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.2. Ejemplo

Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(5, 4)$.
Al sustituir los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = x(2 - 4) - y(1 - 5) + (4 - 10) = 0$$

Por lo tanto la recta tiene la ecuación $-2x + 4y = 6$.

1.3. Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(0, 5)$, $(5, 0)$.
2. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(-2, -3)$, $(3, 2)$.
3. Encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(-5, 0)$, $(2, 6)$.

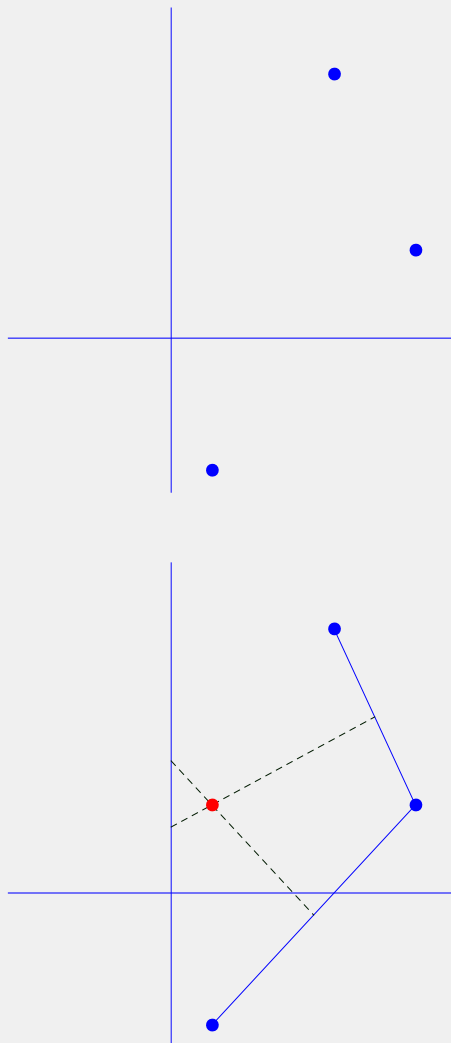
Capítulo 2

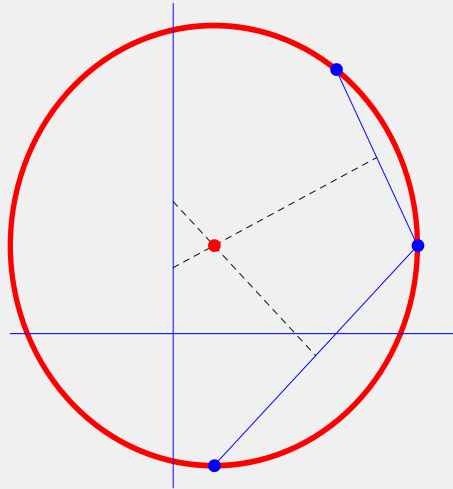
Círculo

2.1. Introducción



Un círculo esta determinado por tres puntos:





La ecuación del círculo esta determinada por la ecuación:

$$a_1(x^2 + y^2) + a_2x + a_3y + a_4 = 0 \text{ equivalentemente a } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

También si se sustituyen los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ en la ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} a_1(x_1^2 + y_1^2) + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4 &= 0 \\ a_1(x_2^2 + y_2^2) + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4 &= 0 \\ a_1(x_3^2 + y_3^2) + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Juntando las cuatro ecuaciones tenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con la solución no trivial a_1, a_2, a_3, a_4 .

Es decir que el determinante asociado es cero.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.2. Ejemplo

Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(-2, -2)$, $(1, -3)$, $(5, 5)$.

Al sustituir los puntos

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 1 \\ 10 & 1 & -3 & 1 \\ 50 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto la recta tiene la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

2.3. Ejercicios

1. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:

$(-3, 4)$, $(-2, 5)$, $(4, 5)$.

Solución $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

2. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-7, 7), (-5, 9), (7, 9)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10^2$
3. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-11, 10), (-8, 13), (1, 16)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 15^2$
4. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-14, 9), (-7, 16), (1, 18)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 17^2$
5. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-15, -11), (1, -19), (13, 17)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20^2$
6. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-3, -1), (-2, 6), (1, 7)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$
7. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-5, -6), (1, -8), (9, 8)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10^2$
8. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-8, -10), (1, 17), (13, 11)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 15^2$
9. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-7, -13), (1, 19), (16, -6)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17^2$
10. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-15, -10), (-11, 18), (17, 14)$. Solución $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20^2$
11. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-2, 0), (-1, 1), (6, -6)$. Solución $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$
12. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-4, 5), (2, 7), (10, 3)$. Solución $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10^2$
13. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-7, 9), (2, 12), (11, 9)$. Solución $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 15^2$
14. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-13, 5), (2, 14), (17, -11)$. Solución $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17^2$
15. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-10, 13), (2, -23), (18, -15)$. Solución $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20^2$
16. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-14, -13), (-10, -5), (-7, -6)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 5^2$

17. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-16, -18), (-10, -20), (-2, -16)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 10^2$
18. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-19, 2), (-10, 5), (-1, 2)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 15^2$
19. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(5, -2), (-10, 7), (-25, -2)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 17^2$
20. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-22, 6), (2, 6), (-10, -30)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 10)^2 = 20^2$
21. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-13, -5), (-7, -13), (-6, -6)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 9)^2 = 5^2$
22. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-18, -15), (-10, -19), (-2, -3)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 9)^2 = 10^2$
23. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-22, 0), (-19, 3), (2, 0)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 9)^2 = 15^2$
24. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-25, -1), (-18, 6), (5, -17)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 9)^2 = 17^2$
25. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
 $(-26, -21), (6, 3), (2, 7)$. Solución $(x + 10)^2 + (y + 9)^2 = 20^2$