Espacios Vectoriales

Definiciones básicas de Espacios Vectoriales

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1

Espacios Vectoriales

1.1. Idea Básica de Espacio Vectorial

Antes de iniciar con las definiciones que involucran un espacio vectorial veamos algunas ideas que nos ayudarán a comprender mejor qué es un espacio vectorial.

1.1.1. Hechos importantes de los espacios vectoriales

1. Primero debemos saber que un espacio vectorial es un conjunto de elementos llamados vectores.

2. Todo espacio vectorial contiene su "cero".

3. Los vectores se pueden "sumar".

Con los anteriores hechos podemos ya dar ejemplos de espacios vectoriales.

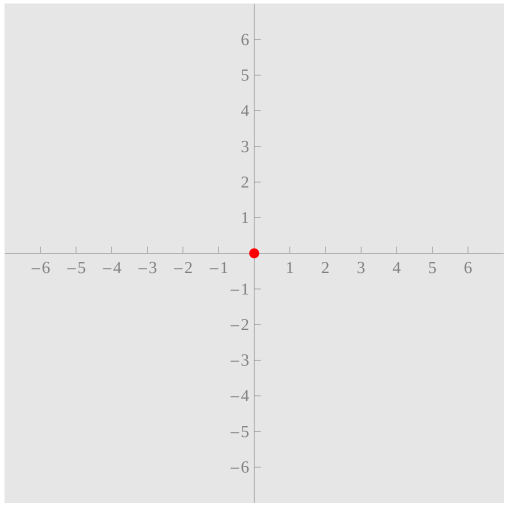

Figura 1.1: Un espacio vectorial cero $\{(0,0)\}$

El ejemplo más sencillo de espacio vectorial es el conjunto cero $V = \{0\}$. Obsérvese que el cero sumado al cero siempre da cero.

1.2. Espacios vectoriales generados por un elemento no cero

Los espacios vectoriales que siguen en complejidad son aquellos generados por un elemento diferente de cero.

Observemos los siguientes hechos del espacio vectorial V generado por un elemento a diferente de cero.

1. Sea a el elemento diferente de cero que generará al espacio vectorial.
2. Si está a, como los elementos de un espacio vectorial conservan las sumas también están $2a, 3a, 4a, ...$
3. Extendiendo el punto anterior a los inversos aditivos, en el espacio vectorial también están $..., -3a, -2a, -a$
4. Hasta el momento V contiene a $= \{..., -2a, -a, 0, a, 2a, ...\}$
5. Es decir, V contiene los múltiplos de a tanto positivos como negativos.
6. Más aún V debe contener también las fracciones como $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, ...$
7. De hecho V contiene a cualquier múltiplo real ra.

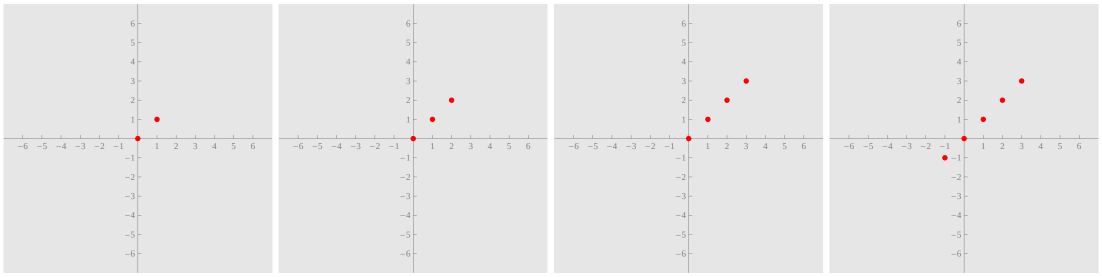

Figura 1.2: Construcción del Espacio vectorial generado por un elemento

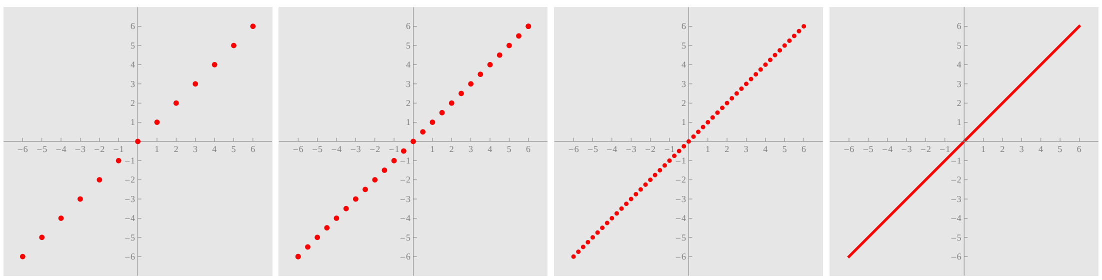

Figura 1.3: El espacio generado por un elemento llega ser una linea recta que pasa por el origen

Los ejemplos concretos de espacios vectoriales generados por un elemento diferente de cero son variados, cabe mencionar que para las matemáticas todos estos espacios vectoriales son “iguales” o isomorfos.

1. Consideremos al plano, y al vector diferente de cero $\vec{a} = (1, 1)$, (en el plano y el espacio los vectores suelen escribirse con una flecha). Entonces, este espacio debe tener también a $-\vec{a}, 0, \vec{a}, 2\vec{a}, 3\vec{a}, \ldots$ como en la figura 1.8.

2. De hecho debe tener también a todos los múltiplos enteros, a los múltiplos racionales y en general a todo vector de la forma $r\vec{a}$, llegando a convertirse en una línea recta 1.3.

3. Debemos observar que todo punto b en la línea puede escribirse como $r\vec{a}$, decimos que $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}$, o que $\vec{b}$ es generado por $\vec{a}$

4. Se dice también que $\vec{a}$ genera toda la línea.

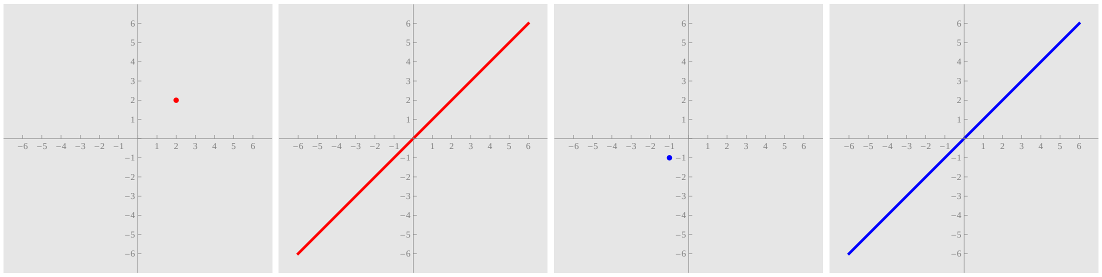

Figura 1.4: Espacios vectoriales generado por $(2, 2)$ y $(-1, -1)$ respectivamente

Nota 1 *Los sub-espacios vectoriales generados por un vector en $\mathbb{R}^2$ son las líneas rectas que pasan por el origen.*

1.3. Espacios vectoriales generados por dos elementos no cero

Para el caso de dos elementos diferentes de cero tenemos las siguientes observaciones.

1. Sea a, b elementos diferentes de cero que generan un espacio vectorial.
2. Si están a, b, como los elementos de un espacio vectorial conservan las sumas también están $2a, 2b, 3a, 3b, \ldots$
3. En general están $\{ra, rb\}$.
4. Pero también esta la suma $a + b$.
5. De manera genérica, tenemos que $V = ra + sb$.

Para ejemplos concretos de espacios vectoriales generados por dos elementos diferentes de cero en el plano tenemos dos casos:

1. Si b es múltiplo de a, entonces el espacio vectorial generados por a y b es el mismo 1.4.
2. Si b no es múltiplo de a, el espacio generado es todo el plano.

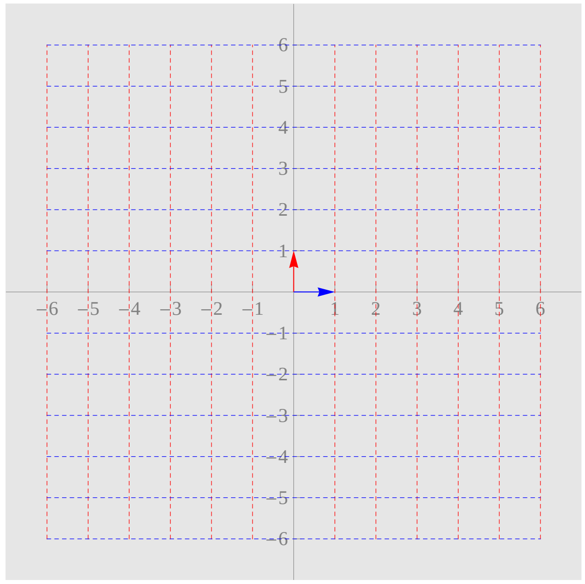

Figura 1.5: Espacio vectorial generado por $(1,0)$ y $(0,1)$

1.4. Definición de espacio vectorial y ejemplos

Sea un campo K, por ejemplo los números racionales $\mathbb{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$, o los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 1 *Sea K un campo, un conjunto no vacío V, se llama espacio vectorial, (donde los elementos de V se llaman vectores), y los de K escalares, si V tiene definida una suma que lo hace un grupo abeliano.*
Además se define un producto escalar $kv \in V$, donde $k \in K$, y $v \in V$, y se cumplen las siguientes reglas:

1. *Para todo $k \in K$ y todo $u, v \in V$, $k(u+v) = ku + kv$.*
2. *Para todo $a, b \in K$ y todo $u \in V$, $(a+b)(u) = au + bu$.*
3. *Para todo $a, b \in K$ y todo $u \in V$, $(ab)(u) = a(bu)$.*
4. *Para el escalar $1 \in K$, y todo $u \in V$, $1u = u$.*

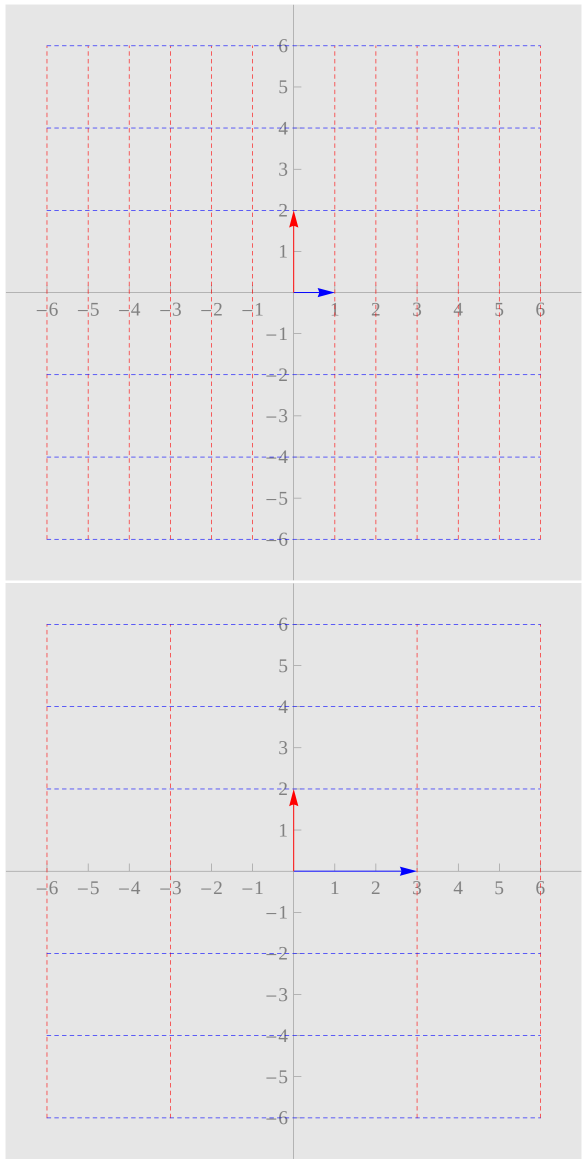

Figura 1.6: Arriba: Espacio vectorial generado por $(1, 0)$ y $(0, 2)$ Abajo: el EV generado por $(3, 0)$ y $(0, 2)$

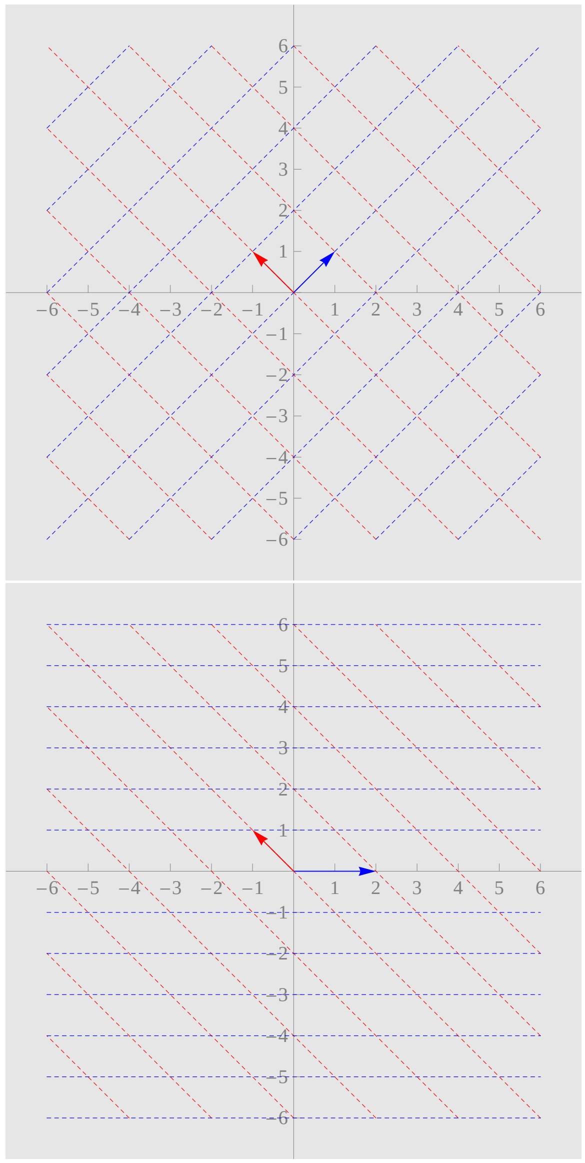

Figura 1.7: Arriba: Espacio vectorial generado por $(1,1)$ y $(-1,1)$ Abajo: el EV generado por $(2,0)$ y $(-1,1)$

Ejemplos:

1. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$.
2. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$.
3. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$.
4. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$.
5. $K = \mathbb{R}$, $V = M_{nm}$.
6. $K = \mathbb{R}$, $F[a, b]$.
7. $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]$, $g \in \mathbb{R}[x]$, $gr(g) \leq n$.
8. $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]$.

Más ejemplos:

1. Sea el símbolo estrella $\bigstar$.
2. Además es posible sumar estrellas, por ejemplo $\bigstar + \bigstar = 2\bigstar$.
3. De la misma manera $\bigstar + \bigstar + \bigstar + \bigstar + \bigstar = 5\bigstar$.
4. También $5\bigstar - 3\bigstar = 2\bigstar$.
5. Así mismo $3\bigstar - 3\bigstar = 0\bigstar$.

Lo anterior nos indica que con el objeto $\bigstar$ y la suma podemos formar el conjunto:

$$E = \{... - 2\bigstar, -1\bigstar, 0\bigstar, 1\bigstar, 2\bigstar, ...\}$$

Esto nos dice que el conjunto E es un grupo abeliano.
Pero además podemos hacer operaciones entre estrellas y números reales, no solo enteros:

1. Sea el símbolo estrella $\bigstar$.
2. Es posible factorizar estrellas $2{,}5\bigstar + 5{,}2\bigstar = (2{,}5 + 5{,}2)\bigstar = 7{,}7\bigstar$.

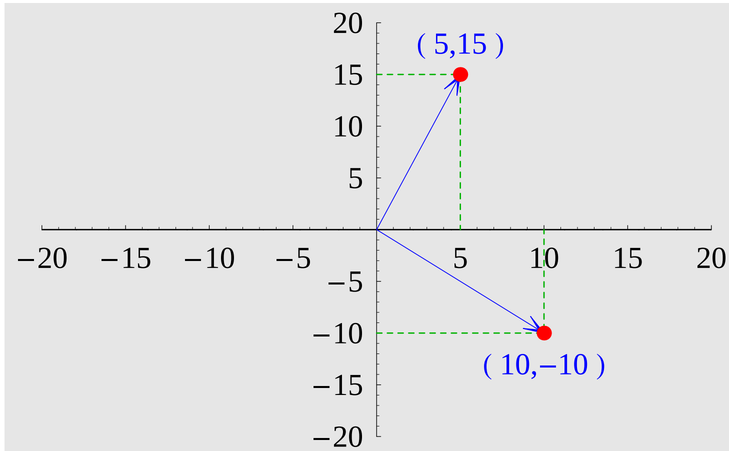

Figura 1.8: $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial.

3. Es posible multiplicar $2{,}5(3\bigstar) = (2{,}5 \cdot 3)\bigstar = 7{,}5\bigstar$.
4. También es posible distribuir números $3(\bigstar + 5\bigstar) = 3\bigstar + 15\bigstar = 18\bigstar$.

Finalmente nuestro conjunto E llega a ser un continuo de estrellas.

$$E = \{... - 2\bigstar, -1\bigstar, 0\bigstar, 1\bigstar, \frac{1}{2}\bigstar, \pi\bigstar, ...\}$$

E es un espacio vectorial generado por el objeto estrella $\bigstar$.

Espacio $\mathbb{R}^n$ y representación gráfica para $n = 2$ y 3
Uno de los espacios vectoriales más usado es $\mathbb{R}^n$ sobre los reales $\mathbb{R}$.
Si $n = 2$, entonces tenemos al plano, si $n = 3$ tenemos al espacio.

Definición 2 *Un subconjunto $W \subset V$ es un subespacio vectorial, si es espacio vectorial por si mismo.*

Un subconjunto no vacío $W \subset V$ es subespacio si:

1. W no es vacío.
2. Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
3. Si $u \in W$, y $k \in K$, entonces $ku \in W$.

    a) $\mathbb{R}^2$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathbb{R}^2$ se pueden ver como $(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3$. Entonces sea $x = (a_1, a_2, 0), y = (b_1, b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, entonces $x + y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, y $rx = r(a_1, a_2, 0) = (ra_1, rb_1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

    b) $W = 0$ es un subespacio vectorial de cualquier espacio vectorial.

    c) Si un subconjunto W no contiene al cero, entonces W no es subespacio vectorial.

    d) $W = (a, b)$ tal que $a, b > 0$, es espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?. Este conjunto no es espacio vectorial ya que si $r = -1$, entonces $rx \notin W$.

    e) Sea $W = \{(a, b, 1) \in \mathbb{R}^3\}$, entonces W no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

    f) Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = 0$, entonces $W = \{x|Ax = 0\}$, entonces W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ donde A es una matriz $m \times n$.

    g) Para el sistema no-homogéneo $Ax = b$, el conjunto solución no es un subespacio vectorial.

Ejercicios

1. Listar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.
2. Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

    a) $(a, b, 2)$.

    b) (a, b, c), donde $c = a + b$.

    c) (a, b, c), donde $c > 0$.

    d) (a, b, c), donde $a = c = 0$.

    e) (a, b, c), donde $a = -c$.

    f) (a, b, c), donde $b = 2a + 1$.

3. Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^4$.

    a) (a, b, c, d) donde $a - b = 2$.

    b) (a, b, c, d) donde $c = a + 2b$, y $d = a - 3b$.

    c) (a, b, c, d) donde $a = 0$, y $b = -d$.

    d) (a, b, c, d) donde $a = b = 0$.

    e) (a, b, c, d) donde $a = 1, b = 0$ y $c + d = 1$.

    f) (a, b, c, d) donde $a > 0, b < 0$.

1.5. Combinación lineal y espacio generado

Definición 3 *Sea V un espacio vectorial sobre K, y sean $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, entonces una combinación lineal de estos vectores con los escalares $a_1, ..., a_n$ es: $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \in V$.*

Ejemplos:

1. Una combinación lineal del vector $(1, 2)$ es $2(1, 2) = (2, 4)$, ó $-3(1, 2) = (-3, -6)$.
2. Una combinación lineal de los vectores $(1, 2), (3, -1)$ es una combinación de suma de múltiplos de estos vectores. Por ejemplo $2(1, 2) + 5(3, -1)$, ó $-3(1, 2) + 4(3, -1)$.
3. Una combinación lineal de los vectores $(1, 1, -1), (2, 1, 4)$ es por ejemplo $3(1, 1, -1) - 3(2, 1, 4)$.
4. Una combinación lineal de las matrices A, B es $4A + 5B$.
5. Una combinación lineal de los símbolos $\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit$ es $5\clubsuit + 4\spadesuit - 3\diamondsuit$.

Nota 2 *La idea principal de las combinaciones lineales es la posibilidad de construir espacios vectoriales a partir de elementos básicos. Lo que nos lleva a la definición de espacio generado.*

Definición 4 *Sea S un subconjunto no vacío de vectores en un espacio vectorial V, entonces el subespacio vectorial de todas las combinaciones lineales de vectores de S, es el subespacio vectorial generado por S.*

1. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, entonces el subespacio generado por **a**, es la linea recta que pasa por **a**.
2. Sean $a, b \in \mathbb{R}^2$ dos vectores diferentes, no cero y no múltiplos. Entonces ellos generan a $\mathbb{R}^2$.
3. Dos vectores o más (uno múltiplo del otro), generan una misma línea recta.
4. Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ no múltiplos a pares generan a todo el espacio, un vector en $\mathbb{R}^3$ genera una línea, dos vectores no múltiplos generan un plano que pasa por el origen.

Ejercicios

1. Listar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$, y unos generadores.
2. Dar un vector que genere la línea recta $y = 3x$.
3. Dar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ que generen una misma línea recta.
4. Dar dos vectores que generen el plano $z = x + y$ en $\mathbb{R}^3$.
5. Dar dos vectores que generen el plano $2x - 3y + 4z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

1.5.1. Independencia lineal

Definición 5 *Sea V un espacio vectorial, entonces se dice los los vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, son linealmente dependientes sobre K si existen escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ no todos cero, tal que: $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$ En caso contrario, los vectores se dicen linealmente independientes.*

Ejemplos:

Sean los vectores $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$, y escalares x, y, z entonces $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, implica que:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Como el sistema tiene una única solución (mostrarlo), entonces la única solución es $x = y = z = 0$, entonces los vectores v_1, v_2, v_3 son $l.i.$

Todo conjunto que incluya al vector 0 es $l.d.$

Ejercicios:

1. cuales de los siguientes vectores generan a $\mathbb{R}^2$.
    a) $(1,2),(-1,1)$.
    b) $(0,0),(1,1),(-2,-2)$.
    c) $(1,3),(2,-3),(0,2)$.
    d) $(2,4),(-1,2)$.
2. Cuales de los siguientes vectores generan a $\mathbb{R}^3$.
    a) $(1,-1,2),(0,1,1)$.
    b) $(1,2,-1),(6,3,0),(4,-1,2),(2,-5,4)$
    c) $(2,2,3),(-1,-2,1),(0,1,0)$.
    d) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$.
3. Cuales de los siguientes vectores generan a $\mathbb{R}^4$.
    a) $(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(1,1,1,0)$.
    b) $(1,2,1,0),(1,1,-1,0),(0,0,0,1)$
    c) $(1,1,0,0),(1,2,-1,1),(0,0,1,1),(2,1,2,1)$.
4. Cuales de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes, en este caso expresar uno de los vectores en combinación lineal de los otros.
    a) $(1,2,-1),(3,2,5)$.
    b) $(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)$.
    c) $(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)$.
    d) $(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)$.
5. Para que valores de c, son los vectores $(-1,0,-1),(2,1,2),(1,1,c)$ en $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes.
6. Demostrar que en $\mathbb{R}^3$, los vectores **i,j,k** son $l.i.$ y generan a $\mathbb{R}^3$.
7. Mostrar que el espacio U generado por los vectores $(1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7)$ y el espacio V generado por los vectores $(1,2,-4,11),(2,4,-5,14)$, son el mismo.
8. Sea V el espacio vectorial de todas las matrices 2×2, sobre los reales. Mostrar que W no es un subespacio de V donde:
    a) W son las matrices con determinante cero.
    b) W son las matrices tales que $A^2 = A$.
9. Para que valor de k el vector $(1,-2,k)\in\mathbb{R}^3$, será una combinación lineal de los vectores $(3,0,-2),(2,-1,-5)$.

10. Escriba la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, como combinación lineal de las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Escriba la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, como combinación lineal de las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.5.2. Bases y dimensión

Definición 6 *Un espacio vectorial V, tiene dimensión n si existen vectores linealmente independientes $e_1, e_2, ..., e_n \in V$, tales que generan a V, de donde al conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se le llama una base de V.*

Teorema 1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, entonces toda base de V tiene el mismo número de elementos.*

Ejemplos:

1. Sea K un campo, entonces el espacio vectorial K^n sobre K, tiene como base a los vectores:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,...,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,0,...,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0,...,0,0) \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= (0,0,0,0,...,1,0) \\ e_n &= (0,1,0,0,...,0,1) \end{aligned}$$

2. Sea U, el espacio vectorial de todas las matrices 2×3, sobre un campo K. Entonces las matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Forman una base para U.

3. Sea W el espacio vectorial de todos los polinomios $\mathbb{R}[x]$, de grado $\leq n$. Entonces el conjunto $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ forman una base para W.

Teorema 2 *Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión n, entonces $dim(W) \leq n$. Si $dim(W) = n$, entonces $W = V$.*

Ejemplo: Si $V = \mathbb{R}^3$, y W un subespacio de $\mathbb{R}^3$ entonces:

1. Si $dim(W) = 0$, $W = \{0\}$.
2. Si $dim(W) = 1$, W es una recta que pasa por el origen.
3. Si $dim(W) = 2$, W es un plano que pasa por el origen.
4. Si $dim(W) = 3$, $W = \mathbb{R}^3$.

Suma directa: sean U, W dos subespacios del espacio vectorial V, la suma directa de U y W $U \oplus W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$.

$U \oplus W$ es un subespacio de V, V se dice que es la suma directa de los subespacios U, W si y sólo si $V = U \oplus W$, y $U \cap W = \{0\}$.

Sean U, W dos subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V, entonces $U \oplus W$ tiene dimensión finita y

$$dim(U \oplus W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Ejemplo

Sea U el plano xy, y W el plano yz. $U = \{(a, b, 0)\}$, $W = \{(0, b, c)\}$. Como $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, $dim(U \oplus W) = 3$. También $dim(U) = dim(W) = 2$, Por lo tanto $3 = 2 + 2 - dim(U \cap W)$, es decir $\dim(U \cap W) = 1$, o sea que $U \cap W = \{0, b, 0\}$ es el eje y de dimensión 1.

Ejercicios:

1. Determinar si los siguientes vectores forman una base para $\mathbb{R}^2$.

   a) $(1, 1), (3, 1)$.

   b) $(0, 1), (0, -3)$.

   c) $(2,1),(1,-1)$.
   d) $(2,1),(-3,87)$.
   e) $(1,3),(1,-1)$.
   f) $(1,3),(-2,6)$.

2. Determinar si los siguientes vectores forman una base para $\mathbb{R}^3$.

   a) $(1,1,1),(1,-1,5)$.
   b) $(1,2,3),(1,0,-1),(3,-1,0),(2,1,-2)$.
   c) $(1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)$.
   d) $(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)$.
   e) $(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)$.

3. Determinar si los siguientes vectores forman una base para $\mathbb{R}^4$.

   a) $(1,1,1,1),(0,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1)$.
   b) $(0,0,1,1),(-1,1,1,2),(1,1,0,0),(2,1,2,1)$.

4. Demuestre que las siguientes matrices son base para las matrices M_{22}, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Determine una base para $\mathbb{R}^4$ que incluya a los vectores $(1,0,1,0),(0,1,-1,0)$.

Definición 7 *Sea A una matriz $m \times n$, la nulidad o el kernel de A es la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Ejercicios:

1. Encuentre la dimensión y una base para el espacio solución de $Ax = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Encuentre la dimensión y una base para el espacio solución de $Ax = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Encuentre la dimensión y una base para el espacio solución del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

4. Encuentre la dimensión y una base para el espacio solución del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

5. Encuentre la dimensión y una base para el espacio solución del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

6. Encuentre la dimensión y una base para los siguientes espacios solución:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_1 & & & - & 3x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Ahora tenemos las siguientes equivalencias:

1. El determinante de A es diferente de cero.
2. A es no singular.
3. Existe la matriz inversa A^{-1}.
4. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.
5. El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ tiene como única solución a la trivial.
6. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tiene una única solución.
7. Baja la transformación lineal $A\mathbf{x}$, la imagen inversa de cualquier vector $\mathbf{b}$, en no vacía y consiste de un solo elemento. Es decir Ax es sobre.
8. Bajo la transformación lineal $A\mathbf{x}$ la imagen inversa del cero, es no vacía, y consiste únicamente de $\mathbf{x} = 0$.
9. A tiene rango n.
10. A tiene nulidad 0, $dim(kernel) = 0$.
11. Las filas (columnas) de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en $\mathbb{R}^n$.

1.5.3. Cambio de base

Definición 8 *Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base del espacio vectorial V, y $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ otra base. Supongamos que:*

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + \cdots + a_{1n}e_n \\ f_2 & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + \cdots + a_{2n}e_n \\ f_3 & = & a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 + \cdots + a_{3n}e_n \\ & \vdots & \\ f_n & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + a_{n3}e_3 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array}$$

Entonces la matriz transpuesta P de los coeficientes se llama matriz de cambio de base:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cambia de la base vieja $\{e_i\}$ a la base nueva $\{f_i\}$. Como los vectores $\{f_i\}$ son linealmente independientes, entonces existe la matriz inversa P^{-1}, que es la matriz de cambio de base de $\{f_i\}$ a la base nueva $\{e_i\}$.

Por ejemplo si $\{e_i\} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\{f_i\} = \{(1,1),(-1,0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$, entonces $(1,1) = (1,0)+(0,1)$, y $(-1,0) = -(1,0)+0(0,1)$. Por lo tanto la matriz de cambio de base de $\{e_i\}$ a $\{f_i\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Y la matriz inversa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\{f_i\}$ a $\{e_i\}$.

Ejercicios, encontrar la matriz de cambio de bases para los casos:

1. $\{e_i\} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\{f_i\} = \{(1,2),(2,3)\}$.
2. $\{e_i\} = \{(1,2),(2,3)\}$, $\{f_i\} = \{(1,3),(1,4)\}$.

1.6. Producto interno

Definición 9 *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$). Una función $\langle u, v\rangle \mapsto k \in K$. Se llama producto interno si cumple las siguientes propiedades:*

1. $\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle$.
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, *(en caso de que $K = \mathbb{C}$.)*
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$, *y* $\langle u, u\rangle = 0$ *si y sólo si* $u = 0$.

Definición 10 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$ definimos el producto interno usual como $\langle u, v\rangle = u \bullet v = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$.*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|u \bullet v| \leq \| u \| \| v \| .$$

1.6.1. Ortogonalidad

Definición 11 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$, se dice que los vectores u, v son ortogonales si $u \bullet v = 0$.*

1.6.2. Norma y sus propiedades

Definición 12 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u \in \mathbb{R}^n$ definimos la norma de u como:*

$$\| u \| = \sqrt{u \bullet v}.$$

Definición 13 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u \in \mathbb{R}^n$, si $\| u \| = 1$, se dice que u es unitario o normalizado.*

Definición 14 *Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, y $u, v \in \mathbb{R}^n$, definimos la distancia entre u y v como*

$$d(u, v) = \| v - u \| .$$

1.6.3. Bases ortogonales y ortonormales

Definición 15 *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ es ortogonal si todos los pares de vectores diferentes son ortogonales.*

Teorema 3 *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ ortogonal no nulos, es linealmente independiente.*

Definición 16 *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ se dice ortonormal si*

$$u_i \bullet u_j = \delta_{ij}.$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Teorema 4 *Un conjunto de vectores $\{u_i\} \subset V$ ortonormal no nulos, es linealmente independiente.*

1.6.4. Proyecciones

Definición 17 *La proyección de un vector u en la “dirección"de otro vector v, es:*

$$Proy_v u = (\frac{u \bullet v}{\| v \|^2})v.$$

Teorema 5 (Proceso de Gram-Schmidt) *Sea W un subespacio no nulo de $\mathbb{R}^n$ con base $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, entonces existe una base ortonormal $T = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ para W.*

Proceso de Gram-Schmidt: suponemos que tenemos una base dada $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, y queremos calcular una base ortonormal $T = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$.

1. Hacer $v_1 = u_1$.
2. Calcular los vectores $v_2, v_3, .., v_m$, por la fórmula:

$$v_i = u_i - (\frac{u_i \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1})v_1 - (\frac{u_i \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2})v_2 - \cdots - (\frac{u_i \cdot v_{i-1}}{v_{i-1} \cdot v_{i-1}})v_{i-1}$$

3. Hacer $w_i = \dfrac{v_i}{||v_i||}$.
4. Entonces la base ortonormal es $T = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$.

Ejercicios:

1. Cuales de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales:
   a) $\{(1,-1,2),(0,2,-1),(-1,1,1)\}$.
   b) $\{(1,2,-1,1),(0,-1,-2,0),(1,0,0,-1)\}$.
   c) $\{(0,1,0,-1),(1,0,1,1),(-1,1,-1,2)\}$.
2. Para que valores de a son ortogonales los vectores:
   a) $u = (1,1,-2), v = (a,-1,2)$.
3. Para que valores de a, b son ortonormales los vectores:
   a) $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), v = (a, \frac{1}{\sqrt{2}}, -b)$.
4. Calcular una base ortonormal para los siguientes casos:
   a) $\{(1,-1,0),(2,0,1)\}$.
   b) $\{(1,0,2),(-1,1,0)\}$.
   c) $\{(1,-1,0,1),(2,0,0,-1),(0,0,1,0)\}$.
   d) $\{(1,1,-1,0),(0,2,0,1),(-1,0,0,1)\}$.

1.6.5. Complementos Ortogonales

Definición 18 *Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, un vector u es ortogonal a W si es ortogonal a cada vector de W. El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los vectores de W se llama complemento ortogonal de W y se denota como $W^\perp$.*

Teorema 6 *Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $W^\perp$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $W \cap W^\perp = \{0\}$.*

Teorema 7 *Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

Teorema 8 *Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Teorema 9 *Sea A una matriz $m \times n$, entonces:*

1. *El espacio nulo de A es complemento ortogonal del espacio fila de A.*
2. *El es espacio nulo de A^T, es el complemento ortogonal del espacio columna de A.*