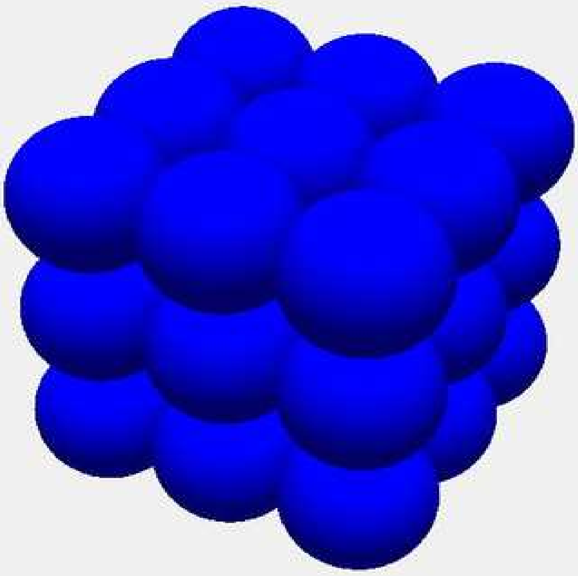
Geometría del Plano y del Espacio



MathCon © 2007-2012

Contenido

1

Geometría

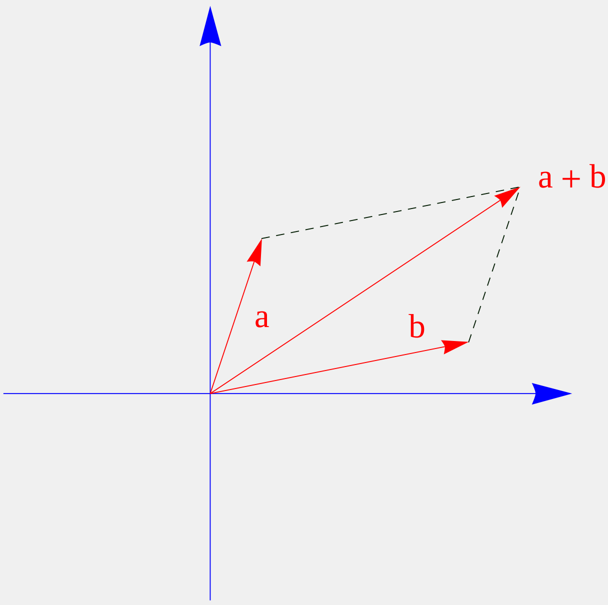
1.1. Introducción

[redacted]

El plano o $\mathbb{R}^2$ y el espacio o sea $\mathbb{R}^3$ son los ejemplos mï¿$\frac{1}{2}$s simples de espacios vectoriales. En este documento recordaremos algunas propiedades de la geometría del plano y del espacio usando sus caracterï¿$\frac{1}{2}$sticas de espacio vectorial.

2
El plano

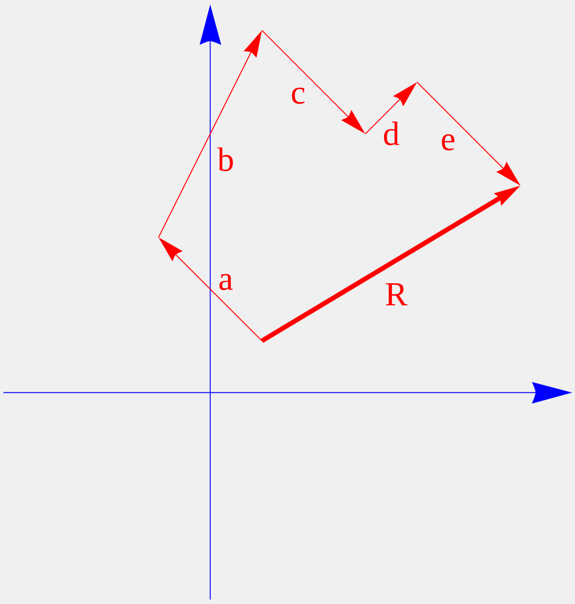
2.1. Suma de vectores



La suma de vectores en el plano se representa con la ley del paralelogramo, la suma de $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

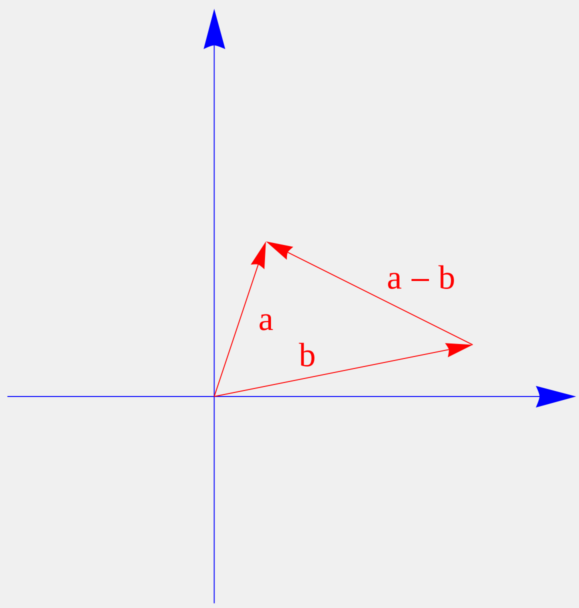
2.2. Suma de vectores



La suma de vectores en el plano de varios vectores, se representa por la sucesión de los vectores, donde el resultado es el vector tomando como su inicio el mismo inicio del primer vector y como final se toma el final del último vector, como se muestra en la figura.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} = \mathbf{R}.$$

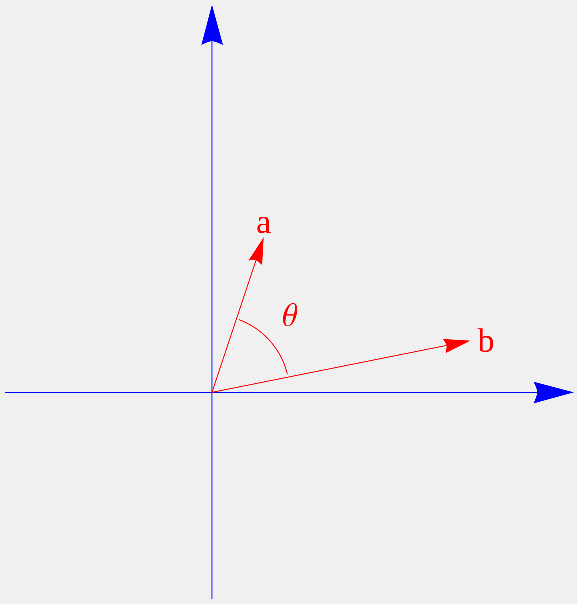
2.3. Resta de vectores



La resta de vectores en el plano se representa como lo muestra la figura, la resta de $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

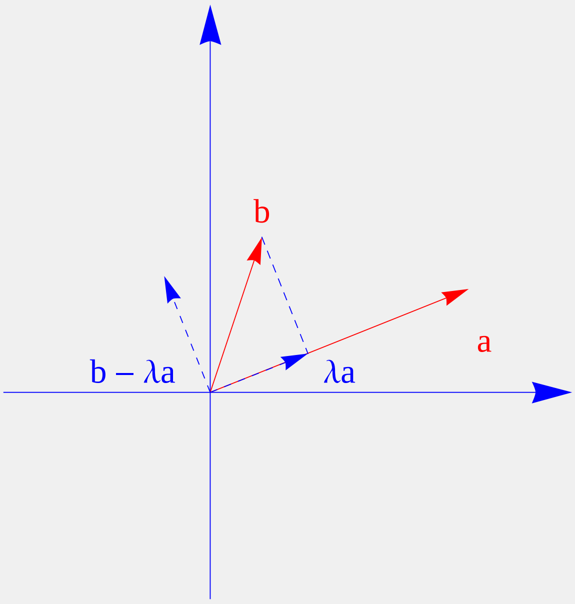
2.4. Ángulo entre vectores



El ángulo entre vectores puede deducirse de la fórmula del producto interno, es decir: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$, de donde

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)$$

2.5. Desigualdad de Cauchy

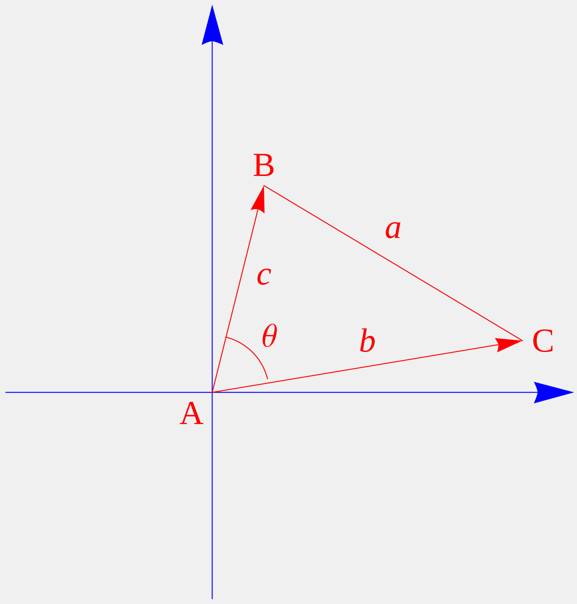


Para cualesquiera dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, entonces $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.
Demostración:
Suponemos que $\mathbf{a} \neq 0$, y $\lambda = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \lambda^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{b}|^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2} \end{aligned}$$

La desigualdad se sigue multiplicando por $|\mathbf{a}|^2$ y tomando raíz cuadrada.

2.6. Ley de los cosenos



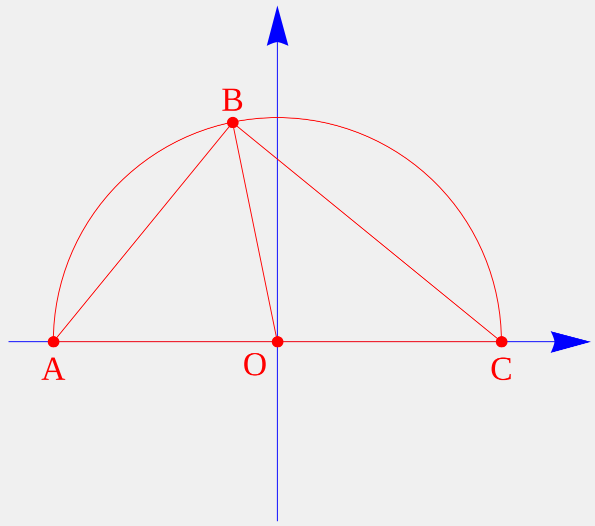
Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y θ es el ángulo opuesto al lado de longitud a, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
a^2 &= |\mathbf{BC}|^2 \\
&= |\mathbf{BA} + \mathbf{AC}|^2 \\
&= (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \cdot (\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) \\
&= \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{BA} \cdot \mathbf{BA} + 2(\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BA}) \\
&= \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AC} + \mathbf{BA} \cdot \mathbf{BA} - 2(\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB}) \\
&= |\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{BA}|^2 - 2|\mathbf{AC}||\mathbf{AB}|\cos\theta \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta
\end{aligned}$$

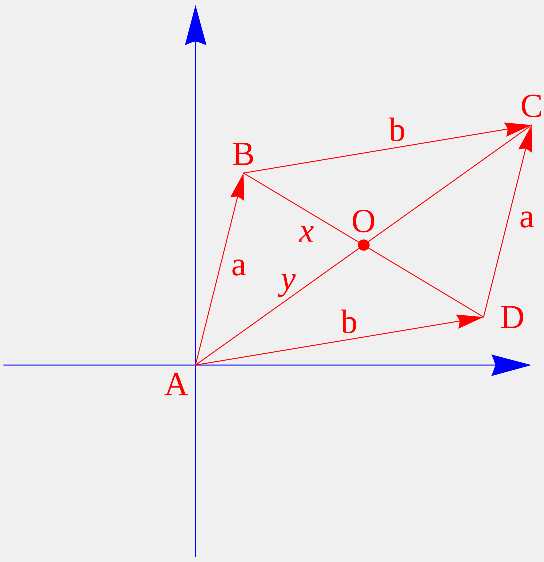
2.7. Ángulo inscrito



Probar que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB}\cdot\mathbf{BC} &= (\mathbf{AO}+\mathbf{OB})\cdot(\mathbf{BO}+\mathbf{OC})\\
&= (\mathbf{OC}+\mathbf{OB})\cdot(-\mathbf{OB}+\mathbf{OC})\\
&= \mathbf{OC}\cdot\mathbf{OC}-\mathbf{OB}\cdot\mathbf{OB})\\
&= |\mathbf{OC}|^2-|\mathbf{OB}|^2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

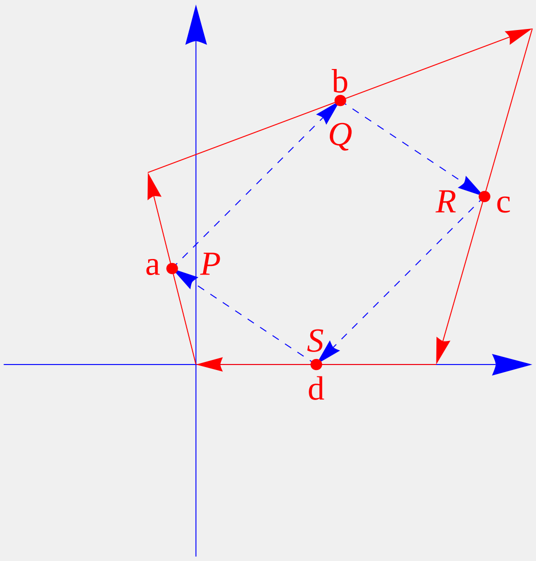
2.8. Diagonales de un paralelogramo



Probar que las diagnales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.
Demostración:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Como} & \mathbf{BD}+\mathbf{a} & = & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{BD} & = & \mathbf{b}-\mathbf{a}, \\
\text{entonces} & \mathbf{BO} & = & x(\mathbf{b}-\mathbf{a}). \\
\\
\text{Como} & \mathbf{AC} & = & \mathbf{a}+\mathbf{b}, \\
\text{entonces} & \mathbf{AO} & = & y(\mathbf{a}+\mathbf{b}). \\
\\
\text{También} & \mathbf{AB} & = & \mathbf{AO}+\mathbf{OB} \\
 & & = & \mathbf{AO}-\mathbf{BO}. \\
\\
\text{Por lo tanto} & \mathbf{a} & = & y(\mathbf{a}+\mathbf{b})-x(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \\
 & & = & (x+y)\mathbf{a}+(y-x)\mathbf{b}. \\
\\
\text{Finalmente} & x+y & = & 1 \\
 & y-x & = & 0. \\
\\
\text{De donde se sigue} & x & = & 1/2. \\
 & y & = & 1/2.
\end{array}$$

2.9. Polígono inscrito



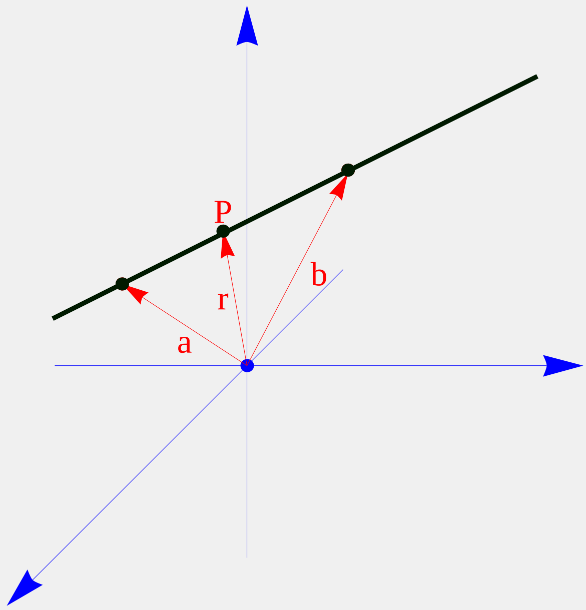
Suponga que los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero están conectados por líneas rectas. Demuestre que el cuadrilátero resultante es un paralelogramo.
Demostración:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Como} & PQ & = & 1/2(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
 & QR & = & 1/2(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \\
 & RS & = & 1/2(\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\
 & SP & = & 1/2(\mathbf{d}+\mathbf{a}). \\
 & & & \\
\text{Además} & \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} & = & \mathbf{0}. \\
 & & & \\
\text{Por tanto} & PQ & = & -1/2(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
 & & = & -1/2(\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\
 & & = & SR. \\
 & & & \\
\text{Y} & QR & = & 1/2(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \\
 & & = & -1/2(\mathbf{d}+\mathbf{a}) \\
 & & = & PS.
\end{array}$$

3

Geometría del espacio

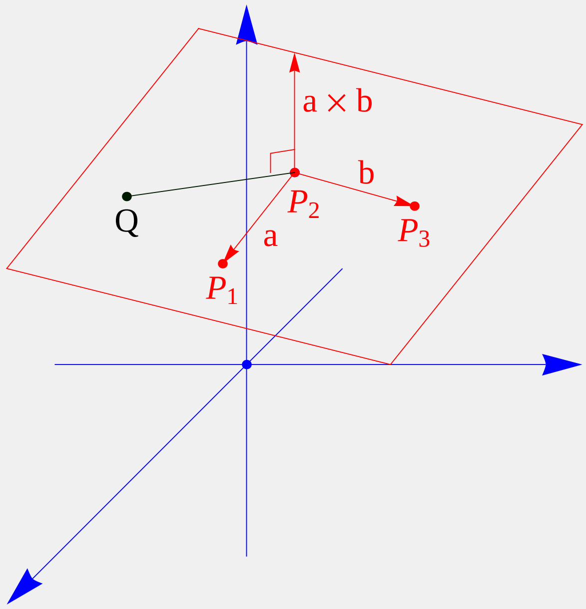
3.1. Ecuación de una línea



Ecuación de la línea que pasa por a y b.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}-\mathbf{a} &= t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\
\mathbf{r} &= \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\
\mathbf{r} &= (1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}
\end{aligned}$$

3.2. Ecuación de un plano



La ecuación de un plano que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3. Como $\mathbf{a} = P_1 - P_2$, $\mathbf{b} = P_3 - P_2$, entonces la ecuación es:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P}_2) \quad = \quad 0$$