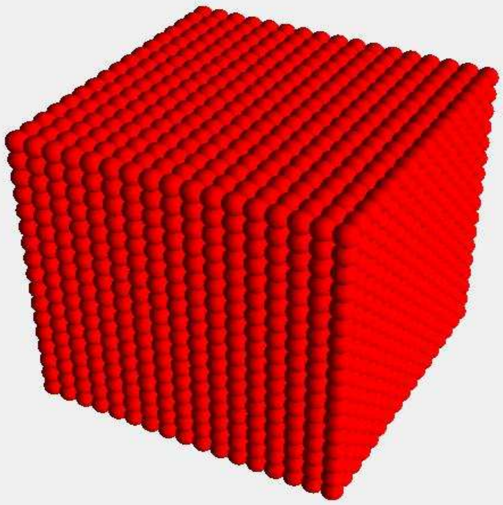
Ecuaciones Diferenciales



Contenido

1. Ecuaciones Diferenciales **2**

1.1. Ecuaciones diferenciales lineales 2

1.1.1. Ejemplos 3

1.1.2. Ejercicios 3

1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales 3

1.3. Ejercicios 4

1.3.1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales . . . 4

1.4. Ejercicios 5

1.4.1. ejercicios 5

1

Ecuaciones Diferenciales

1.1. Ecuaciones diferenciales lineales

[redacted]

En esta sección solo repasaremos las definiciones importantes sobre ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 1 *Una ecuación diferencial lineal tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Si $g(x) = 0$, se llama homogénea, de lo contrario es no-homogénea.

Definición 2 *Si las funciones $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ poseen al menos $n-1$ derivadas. El determinante,*

$$W(f_1, .., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & \vdots & \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se llama el wronskiano de las funciones.

Teorema 1 *Si $y_1, y_2, .., y_n$ son n soluciones de una ecuación diferencial homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si $W(f_1, ..., f_n) \neq 0$ en todo I.*

Teorema 2 *Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

es la solución general de la ECLH.

1.1.1. Ejemplos

[redacted]

1. Las funciones $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal $y'' - 9y = 0$ en todo $\mathbb{R}$. Como:

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

   las soluciones y_1, y_2 constituyen una conjunto de soluciones linealmente independiente (llamado también conjunto fundamental de soluciones), en consecuencia $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ es una solución general de la ecuación en $\mathbb{R}$.

2. Verificar si las funciones $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ en todo $\mathbb{R}$.

1.1.2. Ejercicios

[redacted]

1. $y'' - y' - 12y = 0$, e^{-3x}, e^{4x}, en $\mathbb{R}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$, $e^x \cos(2x)$, $e^x \sin(2x)$, en $\mathbb{R}$.
3. $4y'' - 4y' + y = 0$, $e^{x/2}$, $xe^{x/2}$, en $\mathbb{R}$.
4. $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$, x, $x^{-2}, x^{-2} \ln x$, en $(0, \infty)$.

1.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

[redacted]

Definición 3 *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es un sistema de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n + f_2(t) \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \\
\frac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n + f_n(t)
\end{array}$$

Si las funciones $f_i(t) = 0$ del anterior sistema , entonces el sistema se llama homogéneo.

El sistema se puede escribir de manera matricial de la siguiente forma:

$X' = AX + F$

Teorema 3 *Sean* $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$, ..., $X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$, *soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo. Entonces los vectores son linealmente independientes en un intervalo I si y sólo si el wronskiano*

$$W = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Definición 4

Sean $X_1, X_2, .., X_n$ un conjunto linealmente independiente de soluciones (llamado también conjunto fundamental de soluciones). Entonces la solución general del sistema es:

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n.$$

1.3. Ejercicios

1. Mostrar que $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ son solución de $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$ y son linealmente independientes, escribir entonces la solución general del sistema.

1.3.1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

[redacted]

Teorema 4 *Sean $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ valores propios reales y distintos de la matriz A, y sean $k_1, k_2, ..., k_n$ los vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del sistema lineal homogéneo $X' = AX$ en $(-\infty, +\infty)$ es*

$$X = c_1k_1e^{\lambda_1 t}, c_2k_2e^{\lambda_2 t}, .., c_nk_ne^{\lambda_n t}$$

1.4. Ejercicios

Resolver:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \text{2x + 3y}\\ \frac{dy}{dt} &= \text{2x +y}\end{aligned}$$

De donde la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-4)$
por lo tanto los valores propios son

$$-1, 4$$

Los vectores propios son:

1. Para -1, $(1, -1)$.
2. Para 4, $(3, 2)$.

Por lo tanto la solución general del sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo es:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

1.4.1. ejercicios

[redacted]

1. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x+2y\\ \frac{dy}{dt} &= 4x+3y\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x+2y\\ \frac{dy}{dt} &= x+3y\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x-2y\\ \frac{dy}{dt} &= -6x+5y\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x-3y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x-y\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x-2y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x+6y\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x+3y\\ \frac{dy}{dt} &= 4x+5y\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{5}{2}x+2y\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}x-2y\end{aligned}$$

8. $X' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} X.$

9. $X' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X.$

10. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x+y-z\\ \frac{dy}{dt} &= 2y\\ \frac{dz}{dt} &= y-z\end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x-7y\\ \frac{dy}{dt} &= 5x+10y+4z\\ \frac{dz}{dt} &= 5y+2z\end{aligned}$$

12. $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} X.$

13. $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$

14. $X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3/4 & -3/2 & 3 \\ 1/8 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} X.$

15. $X' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} X.$