MathCon

The Mathematics Firm

Transformaciones Lineales

Definiciones básicas de Transformaciones Lineales

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Transformaciones Lineales.

Definición 1 *Sean V, W espacios vectoriales, una transformación lineal L es una función $L : V \to W$, tal que:*

1. $L(u + v) = L(u) + L(v)$.
2. $L(kv) = kL(u)$.

Proposición 1 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces $L(0) = 0$.*

Demostración:
Sea L una transformación lineal entonces,

$$L(0) = L(v - v) = L(v) - L(v) = 0$$

Corolario 1 *Sea $L : V \to W$, una transformación, si $L(0) \neq 0$, entonces T no es lineal.*

1.1. Núcleo e imagen.

Definición 2 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores $v \in V$ tales que $L(v) = 0$, se llama "$Kernel$" o núcleo de L.*

Definición 3 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores $w \in W$ tales que existe un $v \in V$ y $L(v) = w$, se llama imagen de L.*

Proposición 2 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el kernel de L es un subespacio vectorial de W.*

Proposición 3 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces L es inyectiva (uno a uno) si y sólo si $ker(L) = \{0\}$.*

Demostración:
Sea L una transformación lineal entonces, y sean v_1, v_2 tales que $T(v_1) = T(v_2)$, entonces $T(v_1) - T(v_2) = 0$, o sea $T(v_1 - v_2) = 0$, lo que implica que $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$. Así T es inyectiva.

Definición 4 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces el rango de L es la dimensión de la imagen de L.*

Definición 5 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces la nulidad de L es la dimensión del núcleo de L.*

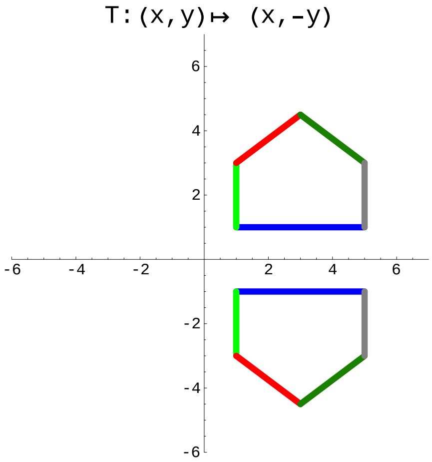

Figura 1.1: Transformación reflexión sobre el eje x.

Proposición 4 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces $nulidad(L) + rango(L) = dim(V)$.*

Proposición 5 *Sea $L : V \to W$, una transformación lineal, entonces*

1. *Si L es uno a uno, entonces es sobre.*
2. *Si L es sobre, entonces es uno a uno.*

1.2. Representación matricial de una transformación lineal

Definición 6 *Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una transformación lineal, definido por la matriz A, como $L(x) = Ax$.*

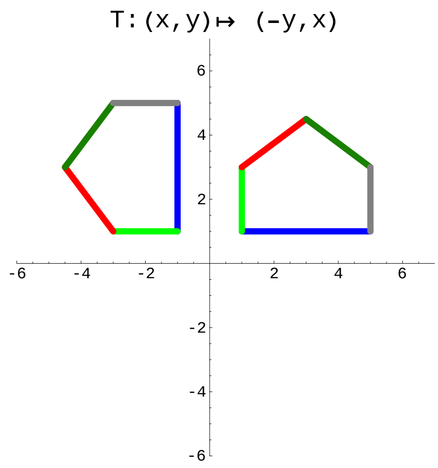

Figura 1.2: Transformación rotación de $90°(-y,x)$.

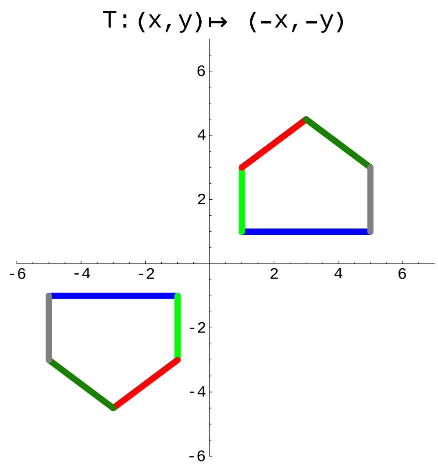

Figura 1.3: Transformación $(-x,-y)$.

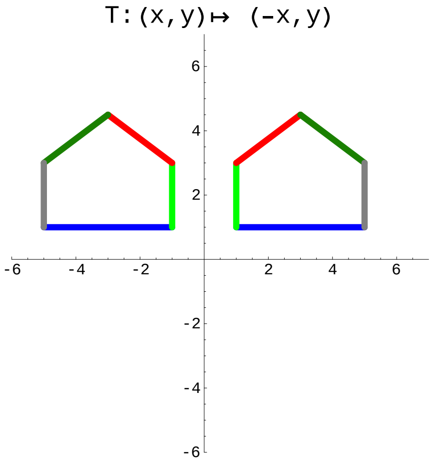

Figura 1.4: Transformación $(-x, y)$.

1.2.1. Ejemplos de transformaciones lineales:

1. ¿Son lineales las siguientes transformaciones?
   a) $L(x, y) = (x + 1, y, x + y)$.
   b) $L(x, y, z) = (x + y, y, x - z)$.
   c) $L(x, y) = (x^2 + x, y - y^2)$.
   d) $L(x, y, z) = (x - y, x^2, 2z)$.
   e) $L(x, y, z) = (2x - 3y, 3y - 2z, 2z)$.
   f) $L(x, y) = (x - y, 2x + 2)$.
   g) $L(x, y, z) = (x + y, 0, 2x - z)$.
   h) $L(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$.
   i) $L(x, y) = (x - y, 0, 2x + 3)$.
2. Encontrar la imagen del punto P, baja la transformación L.

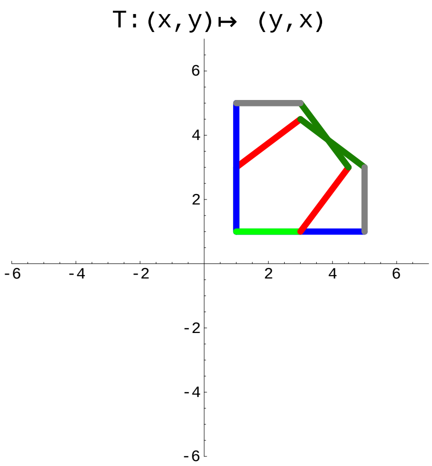

Figura 1.5: Transformación (y, x).

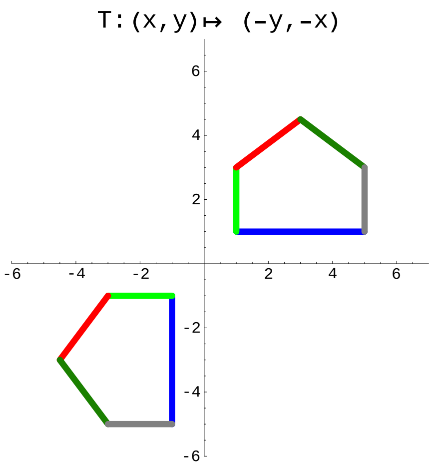

Figura 1.6: Transformación $(-y, -x)$.

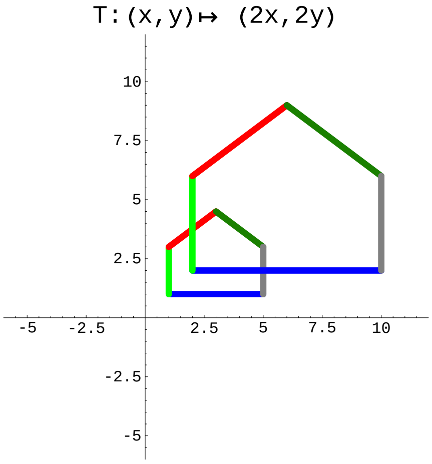

Figura 1.7: Transformación $(2x, 2y)$.

a) $L(x, y) = (x, -y)$, $P = (2, 3)$.

b) $L(x, y, z) = (x, y - z)$, $P = (2, -1, 3)$.

3. Verificar si el punto indicado esta en la imagen de la transformación L.

   a) $L(x, y, z) = (x + z, y + z, x + 2y + 2z), (1, -1, 0), (2, -1, 3)$.

   b) $L(x, y, z) = (-x + 2y, x + y + z, 2x - y + z), (1, 2, -1), (1, 3, 2)$.

4. Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $L(\mathbf{i}) = (2, 3), L(\mathbf{j}) = (-1, 2)$. Determinar $L(4, -3)$.

5. Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $L(\mathbf{i}) = (1, 2, -1), L(\mathbf{j}) = (1, 0, 2), L(\mathbf{k}) = (1, 1, 3)$. Determinar $L(2, -1, 3)$.

6. Determinar los vectores **x** tal ques que $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, para las transformaciones lineales anteriores.

7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $L(u) = Au$, donde $A = \begin{pmatrix} Cos(\phi) & -Sen(\phi) \\ Sen(\phi) & Cos(\phi) \end{pmatrix}$. Para $\phi = 30°$, L define una rotación de 30° en el sentido contrario de las manecillas de reloj.

   a) Si $T_1(u) = A^2u$ describir la acción de T_1 en u.

   b) Si $T_2(u) = A^{-1}u$ describir la acción de T_2 en u.

   c) Cual es menor valor de k tal que $T(u) = A^k u = u$.

8. Determine las coordenadas de la imagen del punto $P = (5, \sqrt{3})$ bajo transformación rotación 30°.

9. Determinar la transformación inversa de la rotación del ejercicio 7.

10. Encontrar las siguientes imagenes de los siguientes puntos bajo los respectivos ángulos.

    a) $P = (2, -3), \theta = 90°$.
    b) $P = (\sqrt{3}, 1), \theta = 30°$.
    c) $P = (1, 2), \theta = 45°$.
    d) $P = (-5, -2), \theta = 180°$.
    e) $P = (\sqrt{3}, 1), \theta = -60°$.
    f) $P = (2, \sqrt{3}), \theta = 30°$.

11. Determinar la ecuación que satisfacen el conjunto de imagenes del lugar $x^2 + y^2 = r^2$ bajo la rotación con un ángulo θ.

12. Determinar si la siguiente matriz es una rotación: $A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

13. Probar que la multiplicación de matrices de rotación es cerrada, y conmutativa.

14. Probar que la distancia entre dos puntos es invariante bajo la rotación.

1.3. Reflexión, Dilatación y Magnificación

1. La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mapea los puntos (x, y) a los puntos $(-x, y)$ lo que significa una reflexión respecto al eje y.

2. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mapea los puntos (x, y) a los puntos $(x, -y)$ lo que significa una reflexión respecto al eje x.

3. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mapea los puntos (x, y) a los puntos (y, x) lo que significa una reflexión respecto al la recta $y = x$.

4. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mapea los puntos (x, y) a los puntos $(-y, -x)$ lo que significa una reflexión respecto al la recta $y = -x$.

5. El producto de cualquiera de estas reflexiones es una rotación.

6. Observe que el determinante de cualquiera de estas reflexiones es -1.

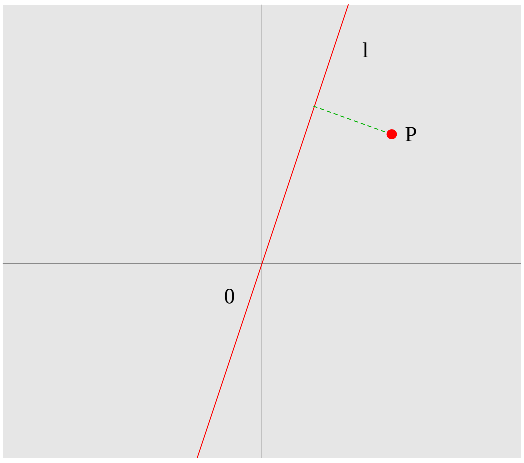

Figura 1.8: P antes de la reflexión.

7. Observe también que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

8. De los ejemplos anteriores se puede deducir que otros tipos de matrices reflexión existen y mapean al plano a otro plano como un espejo respecto a una línea l, se puede mostrar que son iguales a

$$T^{-1}RT$$

donde T es una matriz transformación que mapea la línea l sobre el eje x, R es la transformación reflexión respecto al eje x.

Ejemplo:

Determinar la matriz de reflexión F que mapea cada punto (x, y) del plano a su imagen de espejo respecto a la línea $y = \sqrt{3}x$. Determinar la imagen del punto $P = (\sqrt{3}, 1)$.

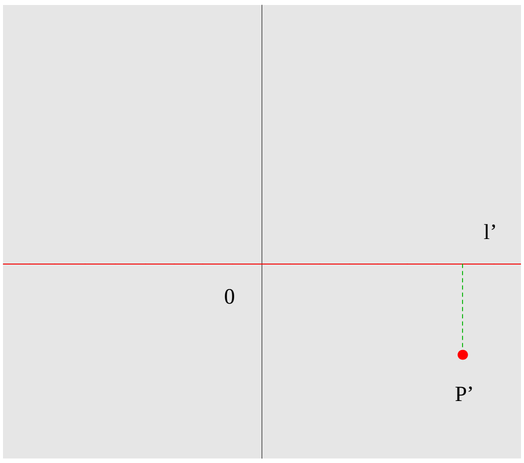

Figura 1.9: P después de T.

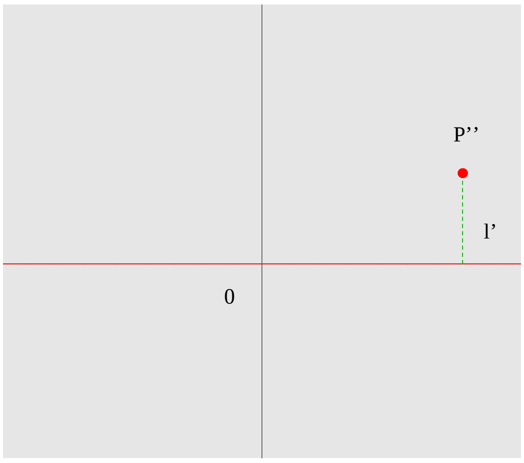

Figura 1.10: P después de R.

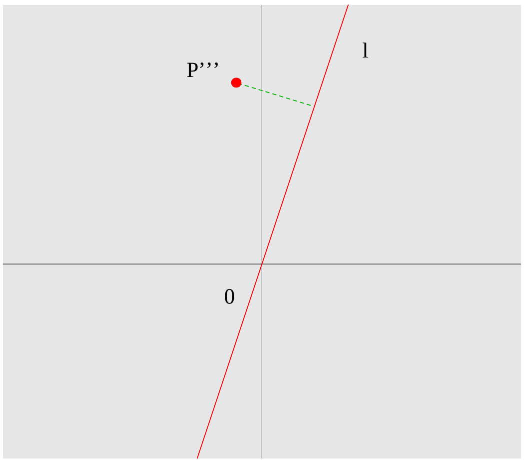

Figura 1.11: P después de T^{-1}.

Una rotación de 30° mapea la línea $y = \sqrt{3}x$ sobre el eje y. Tal rotación se representa por la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

cuya inversa es:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz reflexión del plano respecto el eje y es

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$F = T^{-1}RT = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

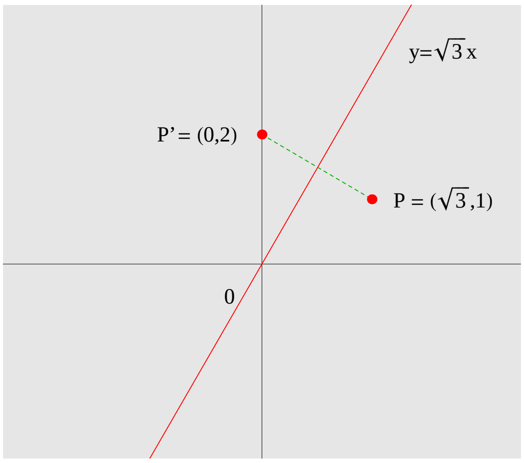

Figura 1.12: $P \mapsto P'$.

Esto es:

$F = T^{-1}RT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. La imagen de P bajo F es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. A es no singular.
2. $x = 0$ es la única solución del sistema $Ax = 0$.
3. A es equivalente por filas a I_n
4. El sistema $Ax = b$ tiene una única solución.
5. $det(A) \neq 0$.
6. A tiene rango n.
7. A tiene nulidad 0.
8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.
9. El operador $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $L(x) = Ax$, es uno a uno y sobre.

Definición 7 *Sea $L : V \to V$, una transformación lineal, la transformación lineal L^{-1} es la inversa de L, si $L(L^{-1}) = I$.*

2

Valores y Vectores Propios

Definición 8 *Sea A una matriz $n \times n$, y L la transformación lineal dada por $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, entonces un valor propio de A es un número real λ y un vector $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que:*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

El vector $\boldsymbol{x}$ se llama vector propio de A.

Proposición 6 *Una matriz A $n \times n$, es no invertible (singular) si y sólo si 0 es un valor propio de A.*

Encontrar los valores y vectores propios de las siguientes matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   $vp = -4, 3, Vp = (1, 2), (-3, 1)$.

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.
   $vp = 15, 2, Vp = (5, 8), (-1, 1)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   $vp = 5, -2, Vp = (6, 1), (-1, 1)$.

4. $A = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$.
   $vp = -17, -1, Vp = (-1, 1), (7, 9)$

5. $A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
   $vp = -8, 5, Vp = (-9, 4), (1, 1)$.

6. $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$.
   $vp = -11, 11, Vp = (-1, 7), (3, 1)$.

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.
   $vp = 6, -5, Vp = (1, 2), (-3, 5)$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.
   $vp = 6, 2, Vp = (1, 1), (5, 1)$.

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$.
   $vp = -12, 2, Vp = (-1, 3), (2, 1)$.

10. $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.
    $vp = 13, 4, Vp = (-1, 2), (1, 1)$.

11. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.
    $vp = -7, -3, Vp = (-1, 5), (-1, 1)$.

12. $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$.
    $vp = 5, -1, Vp = (-1, 1), (-5, 11)$.

13. $A = \begin{pmatrix} -7 & -18 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$.
    $vp = 14, -13, Vp = (-6, 7), (3, 1)$.
14. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$.
    $vp = -3 - \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7}, Vp = (-3 + \sqrt{7}, 1), (-3 - \sqrt{7}, 1)$.
15. $A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.
    $vp = -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, Vp = (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1), (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.
16. $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
    $vp = -1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}, Vp = (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{6}), 1), (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{6}), 1)$.
17. $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$.
    $vp = -\sqrt{85}, \sqrt{85}, Vp = (-\frac{7}{9} + \frac{\sqrt{85}}{9}, 1), (-\frac{7}{9} - \frac{\sqrt{85}}{9}, 1)$.

2.1. Diagonalización de una matriz.

Definición 9 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. El determinante de la matriz $det(\lambda I_n - A)$ le llamaremos el polinomio característico de A.*

Teorema 1 *Teorema de Cayley-Hamilton: La matriz A es cero de su polinomio característico.*

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcular A^5 usando el teorema de Cayley-Hamilton.

Proposición 7 *Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.*

Definición 10 *Se dice que una matriz B es semejante o similar a una matriz A, si existe una matriz no singular (invertible) P, tal que:*

$$B = P^{-1}AP.$$

Definición 11 *Se dice que una matriz B diagonalizable si es similar a una matriz diagonal.*

Proposición 8 *Las matrices similares tienes los mismos valores propios.*

Proposición 9 *Una matriz A $n \times n$, es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Proposición 10 *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz A $n \times n$, son distintas, entonces A es diagonalizable.*

De ejercicios anteriores sabemos que:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. $vp = -4, 3$, $Vp = (1,2), (-3,1)$.
   Si ponemos a $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, podemos verificar que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, verificar si:
   a) Si $\lambda = -1$, es un valor propio de A y $(1,0,-1)$ es el vector propio asociado.
   b) Si $\lambda = 2$, es un valor propio de A y $(-2,-3,2)$ es el vector propio asociado.
   c) Si $\lambda = 4$, es un valor propio de A y $(8,5,2)$ es el vector propio asociado.
2. Determinar los polinomios característicos de las siguientes matrices.
   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
   b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Determinar si la matriz dada es diagonalizable.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4. Determinar si es posible una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$