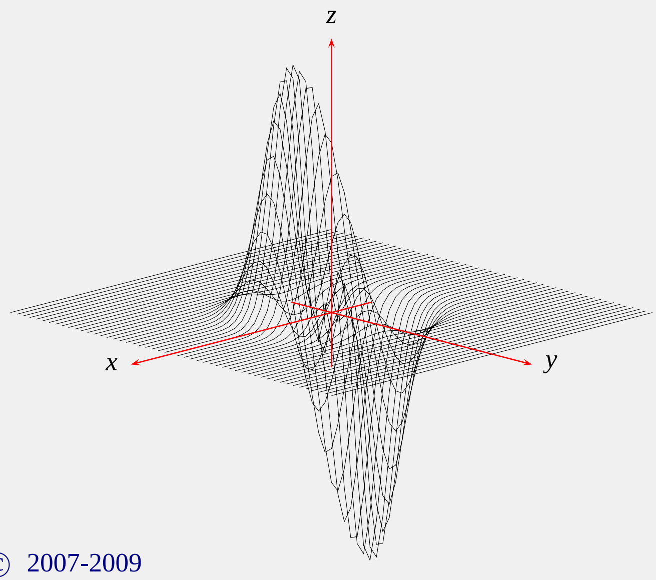
MathCon

The Mathematics Firm

Números Reales



Contenido

1

Introducción

1.1. Propiedades básicas de los números naturales

Definición: el conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Propiedades de números naturales:

1. Con los números naturales podemos contar objetos.
2. Para todo número natural n siempre existe su sucesor, es decir $n+1$.
3. Los números enteros se pueden sumar: si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces se puede realizar la suma $n+m$ que también será un número natural (los naturales son cerrados bajo la suma).
   a) La suma de naturales es conmutativa.
   b) La suma de naturales es asociativa.
4. Los números naturales se pueden multiplicar: si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces se puede realizar la multiplicación $n \cdot m$ que también será un número natural (los naturales son cerrados bajo la multiplicación).

1.2. Propiedades básicas de los números enteros

Definición: el conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Propiedades de números enteros:

1. Los números enteros se pueden sumar:
   a) La suma de enteros es cerrada: si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n+m \in \mathbb{Z}$.
   b) La suma de enteros es conmutativa: si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n+m = m+n$.
   c) La suma de enteros es asociativa: si $n, m, p \in \mathbb{Z}$, entonces $n+(m+p) = (n+m)+p$.
   d) Existe un neutro aditivo, llamado cero y escrito 0 tal que $n+0 = 0+n = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   e) Para todo número entero a existe su inverso aditivo $-a$, tal que $a+(-a) = 0$.
2. Los números enteros se pueden multiplicar:
   a) La multiplicación de enteros es cerrada: si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n \cdot m \in \mathbb{Z}$.
   b) La multiplicación de enteros es conmutativa: si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n \cdot m = m \cdot n$.
   c) La multiplicación de enteros es asociativa: si $n, m, p \in \mathbb{Z}$, entonces $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.
   d) Existe un neutro multiplicativo, llamado uno y escrito 1 tal que $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dentro de los número enteros ya existen muchas propiedades y operaciones que podemos realizar, enseguida mencionaremos algunas.

1.2.1. Orden

Decimos que un número entero a es mayor a b si $a-b$ es positivo.

1.2.2. Divisibilidad

Sean dos numeros enteros a, b entonces decimos que b divide a a si existe otro número entero c tal que $a = b \cdot c$. También se dice que b es un factor de a.

1. 2 divide a 6 ya que $6 = 2 \cdot 3$.
2. 3 divide a 12 ya que $12 = 3 \cdot 4$.

1.2.3. Números primos

Un número entero positivo p mayor a 1 se llama primo si sólo es divisible por 1 y por si mismo.

1. 2 es el único primo par.
2. Algunos números primos: 3, 5, 7, 11 , 13, ...

Teorema fundamental de la aritmética: Todo número entero positivo mayor a 1, se puede escribir de manera única como un producto de potencias de números primos.

1.2.4. Algoritmo de Euclides

Dado a cualquier entero y b un entero positivo entonces siempre existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < b$.

1.3. Propiedades básicas de los números racionales

Definición: el conjunto de los números racionales es $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Propiedades de números racionales:

1. Los números racionales se pueden sumar:
   a) La suma de racionales es cerrada: si $n, m \in \mathbb{Q}$, entonces $n + m \in \mathbb{Q}$.
   b) La suma de racionales es conmutativa: si $n, m \in \mathbb{Q}$, entonces $n + m = m + n$.
   c) La suma de racionales es asociativa: si $n, m, p \in \mathbb{Q}$, entonces $n + (m + p) = (n + m) + p$.
   d) Existe un neutro aditivo, llamado cero y escrito 0 tal que $n + 0 = 0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{Q}$.
   e) Para todo número racional a existe su inverso aditivo $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
2. Los números racionales se pueden multiplicar:
   a) La multiplicación de racionales es cerrada: si $n, m \in \mathbb{Q}$, entonces $n \cdot m \in \mathbb{Q}$.
   b) La multiplicación de racionales es conmutativa: si $n, m \in \mathbb{Q}$, entonces $n \cdot m = m \cdot n$.
   c) La multiplicación de racionales es asociativa: si $n, m, p \in \mathbb{Q}$, entonces $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.
   d) Existe un neutro multiplicativo, llamado uno y escrito 1 tal que $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ para todo $n \in \mathbb{Q}$.
   e) Para todo número racional $a \neq 0$ existe su inverso multiplicativo a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Para simplificar mencionar las propiedades anteriores decimos que $(\mathbb{Q}, +)$ forman un grupo abeliano, y $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ forman también un grupo abeliano, donde $\mathbb{Q}^*$ son los números racionales sin el cero.

Propiedades distributiva: Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

Como $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ forman un grupo abeliano, y se cumple la propiedad distributiva de la suma respecto al producto en los números racionales, entonces decimos que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un "**Campo**".

1.3.1. Representación de los números racionales

Todo número racional se puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$. Todo número racional tiene una representación decimal, donde la parte fraccionaria es finita o periódica.

No es difícil obtener la representación decimal de un número racional efectuando la división. El proceso inverso tampoco es difícil. He aquí algunos ejemplos:

Si $p = 0{,}332222\ldots$, entonces $p = \frac{33}{100} + \frac{1}{10^3} \cdot 2(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots)$

Pero $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$ es una serie geométrica tal que:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

Por lo tanto:

$$p = \frac{33}{100} + \frac{1}{10^3} \cdot 2(\frac{10}{9})$$

1.4. Numerabilidad

Decimos que un conjunto es numerable si tiene los mismos elementos que números naturales.

1. Los números enteros son numerables.
2. Los números racionales son numerables.

2
Demostraciones

2.1. Cálculo proposicional

En esta sección daremos algunas definiciones básicas con el objeto de hacer algunas demostraciones matemáticas simples.

Definición 1 *Una* proposición *es una afirmación que esta escrita en un lenguaje (español) y siempre podemos decir si es falsa o verdadera sin ninguna ambigüedad.*

Ejemplos de proposiciones:

1. Todo número es par.
2. Todo número no es primo.
3. Todo número real tiene inverso aditivo.
4. El cuadrado de un número par es par.
5. La ecuación $y = 2x + 1$ tiene como raíz a $x = \frac{1}{2}$.
6. El cuadrado de un número par es par.
7. Existe un único número primo par.

Definición 2 *Una proposición que siempre es falsa se llama contradicción.*

Definición 3 *Una proposición que siempre es verdadera se llama tautología.*

2.2. Conectivos lógicos

Definición 4 *Los conectivos lógicos son operadores, unarios y binarios que conectan una o dos proposiciones para formas otra proposición*

Conectivos lógicos:

1. Negación: si p es verdadero entonces $\neg p$ es falso, y si p es falso entonces $\neg p$ es verdadero.
2. Disjunción: la disjunción $p \vee q$ es falsa sólo si las dos componentes son falsas.
3. Conjunción: la conjunción $p \wedge q$ es verdadera sólo si las dos componentes son verdaderas.
4. Implicación: la implicación $p \Rightarrow q$ es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.
5. Equivalencia: la equivalencia $p \Leftrightarrow q$ es verdadera si las dos componentes tiene el mismo valor.

2.3. Teorema

Entonces para cualquier combinación entre proposiciones podemos calcular su valor de verdad.

Ejemplos:

1. Si p es F y q es V, entonces $p \Rightarrow q$ es V.

Definición 5 *Un teorema matemático es una sucesión finita de proposiciones, donde las primeras se llaman hipótesis y la última se llama conclusión.*

Definición 6 *Todo teorema tiene asociada una condicional, donde el antecedente es la conjunción de las hipótesis y el consecuente es la conclusión.*

Definición 7 *Demostrar un teorema en matemáticas significa suponer verdadero el antecedente de la condicional asociada al teorema y por medio de pasos lógicos verificar que la conclusión es también verdadera.*

Un teorema es una afirmación muy importante dentro de una teoría, un lema es una afirmación que precede a un teorema, una proposición es una afirmación menos importante, un corolario es una afirmación que sigue a un teorema como un caso particular e importante dentro de la teoría.

2.4. Métodos de demostración

2.4.1. Para la corrección de teoremas

Método directo

En el método directo, se supone que el antecedente, del condicional asociado al teorema, es verdadero, y por medio de equivalencias lógicas se llega a verificar que la conclusión es verdadera.

Método por reducción al absurdo

En el método por reducción al absurdo, se supone que el antecedente, del condicional asociado del teorema es verdadero, y el consecuente es falso, por medio de equivalencias lógicas se llega a una contradicción. Por lo tanto, como en matemáticas las afirmaciones solo pueden ser o falsas o verdaderas (ley del tercero excluido), el consecuente (conclusión) necesariamente debe ser verdadera.

2.4.2. Para la incorrección de teoremas

Método del contraejemplo

El método del contraejemplo sirve para mostrar que el condicional asociado a nuestro teorema es falso. Este consiste en dar un ejemplo donde el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

3
Ejemplos de demostraciones

3.1. Método directo

1. **Teorema:** si un número n es par, entonces n^2 es par.
   (usemos el *método directo*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que n es número par (V).

Paso 2 Entonces n se puede escribir como $n = 2k$ (V).

Paso 3 Elevando al cuadrado $n^2 = (2k)^2$, por lo tanto $n^2 = 2(2k^2)(V)$.

Paso 4 De 3, n^2 es par (V).

2. **Teorema:** si un número n es impar, entonces n^2 es impar.
   (usemos el *método directo*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que n es número impar (V).

Paso 2 Entonces n se puede escribir como $n = 2k+1$ (V).

Paso 3 Elevando al cuadrado $n^2 = (2k+1)^2$, por lo tanto $n^2 = (4k^2+4k+1) = 2(2k^2+2k)+1(V)$.

Paso 4 De 3, n^2 es impar (V).

3. **Teorema:** la suma de dos números pares es par.
   (usemos el *método directo*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que a es número par y b es par (V).

Paso 2 Entonces $a = 2k$ y $b = 2l$ (V).

Paso 3 Sumando $a+b = 2k+2l = 2(k+l)$ (V).

Paso 4 De 3, $a+b$ es par (V).

4. **Teorema:** Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
   (usemos el *método directo*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que $a|b$ y $b|c$ (V).

Paso 2 Entonces $b = ak$ y $c = bn$ (V).

Paso 3 Sustituyendo $c = bn = (ak)n = a(kn)$ (V).

Paso 4 De 3, $a|c$ (V).

5. **Teorema:** Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.
   (usemos el *método directo*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que $A \subset B$ (V).

Paso 2 Entonces todo elemento $x \in A$, está también en B. (V).

Paso 3 Queremos mostrar que $A \cap B = A$. Pero se sabe que $A \cap B \subset A$ es (V) siempre.

Paso 4 Basta mostrar que $A \subset A \cap B$ (V).

Paso 5 Mostrando 4, damos un elemento x en A, y por 2, entonces $x \in B$, por lo tanto $x\ inA \cap B$. Mostrando 4.

Paso 6 El paso 2, 6 muestra que $A \cap B = A$.

3.2. Método indirecto

1. **Teorema:** Si a^2 es par, entonces a es par.
   (usemos el *método indirecto*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos que a es impar (V).

Paso 2 Entonces $a = 2k+1$ y $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ (V).

Paso 3 De 2 se deduce que a^2 es impar, contradiciendo la hipótesis (V).

Paso 4 Por lo tanto a necesariamente debe ser par (V).

2. **Teorema:** Hay una cantidad infinita de números primos.
   (usemos el *método indirecto*)
   Demostración:

Paso 1 supongamos que hay una cantidad finita de primos $P = \{2, 3, 5, \ldots, p\}$ (V).

Paso 2 Considérese $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ el producto de todos los elementos de P más 1 (V).

Paso 3 n no es divisible por cualquier primo de P ya que $n = p_i k + 1$ para todo $p_i \in P$.

Paso 4 Pero habíamos supuesto que P contiene a todos los primos, entonces hay una contradicción ya que encontramos $n \notin P$ y primo.

Paso 5 Esto quiere decir que la suposición del Paso 1 es falsa, por lo tanto hay un número infinito de primos.

3. **Teorema:** $\sqrt{2}$ es irracional.
   (usemos el *método indirecto*)
   Demostración:

Paso 1 Suponemos $\sqrt{2}$ es racional (V).

Paso 2 Entonces $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ para algún $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ (V).

Paso 3 Además podemos supones que los factores comunes de a, b han sido reducidos en $dfracab$ (V).

Paso 4 Ahora elevamos al cuadrado $2 = \frac{a^2}{b^2}$, es decir $a^2 = 2b^2$ (V).

Paso 5 Lo anterior significa que a^2 es par, por lo tanto (ejercicio 1) a es par (V).

Paso 6 O sea $a = 2k$ (V).

Paso 7 Ahora, $(2k)^2 = 2b^2$, implica que $2k^2 = b^2$, de la misma forma, obtenemos que b es par, $b = 2l$ (V).

Paso 8 Entonces $\sqrt{2} = \frac{2k}{2l}$, contradiciendo 3.

Paso 9 Por lo tanto necesariamente $\sqrt{2}$ no es racional, es decir es irracional.

3.3. Método del contraejemplo

1. **Teorema:** Todos los números primos son impares.
   (usemos el *método del contra ejemplo*)
   Demostración:

Paso 1 2 es par y primo.

Paso 2 Entonces No todos los primos son impares.

2. **Teorema:** El producto de dos números irracionales es un número irracional.
   (usemos el *método del contra ejemplo*)
   Demostración:

Paso 1 Sea $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$, dos números irracionales.

Paso 2 $a^2 = 2$ que no es irracional.

Paso 3 Entonces no es cierto que el producto de dos irracionales es siempre un número irracional.

3. **Teorema:** El producto de dos números irracionales es un número racional.
   (usemos el *método indirecto*)
   Demostración:

Paso 1 Sea $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3}$, dos números irracionales.

Paso 2 $a \cdot b = \sqrt{6}$, que es irracional.

Paso 3 Entonces no es cierto que el producto de dos irracionales es siempre un número racional.

4

Números Reales

4.1. Propiedades de campo de los Números Reales

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con la suma $(\mathbb{R},+)$.

1. Para todo reales a,b, entonces $a+b\in\mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a,b, entonces $a+b=b+a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a,b,c, tenemos que $a+(b+c)=(a+b)+c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $0\in\mathbb{R}$, llamado cero, tal que $a+0=0+a=a$, $\bigvee a\in\mathbb{R}$, (existencia del neutro aditivo).
5. Para todo $a\in\mathbb{R}$, existe un real llamado inverso aditivo $(-a)$, tal que $a+(-a)=0$, (existencia del inverso aditivo).

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con el producto $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.

1. Para todo reales a,b, entonces $a\cdot b\in\mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a,b, entonces $a\cdot b=b\cdot a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a,b,c, tenemos que $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $1\in\mathbb{R}$, llamado uno, tal que $a\cdot 1=1\cdot a=a$, $\bigvee a\in\mathbb{R}$, (existencia del neutro multiplicativo).
5. Para todo $a\in\mathbb{R}^*$, existe un real llamado inverso multiplicativo (a^{-1}), tal que $a\cdot(a^{-1})=1$, (existencia del inverso multiplicativo).

Propiedades distributiva de la suma respecto al producto en los $\mathbb{R}$.

1. Para todo reales a,b,c, tenemos que $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, (distributividad).

Propiedades de campo de los $\mathbb{R}$

Definición 8

Si $(\mathbb{R},+),(\mathbb{R}^*,\cdot)$ son grupos Abelianos, y se cumple la distributividad del producto respecto a la suma. Entonces $(\mathbb{R},+,\cdot)$ es un Campo.

Observación 1 *Observamos que tanto el 0, como el 1 y los inversos aditivos y multiplicativos son únicos. Esto puede mostrarse sin mayor problema. De aquí en adelante lo tomaremos como válido.*

Proposición 1 *Sea $a,b,c \in \mathbb{R}$, si $a+b=a+c \Rightarrow b=c$.*

Ejemplo 1

1. *Si* $3+b=3+c \Rightarrow b=c$.
2. *Si* $5+b=5+c \Rightarrow b=c$.

Demostración:

Paso 1 Sea y el inverso aditivo de a, entonces $y+a=0$.

Paso 2 Consideremos $y+(a+b)=(y+a)+b$, por asociatividad.

Paso 3 Del paso 1, $y+(a+b)=(y+a)+b=0+b=b$, por neutro aditivo.

Paso 4 Por otro lado $y+(a+c)=(y+a)+c$, por asociatividad.

Paso 5 Entonces del paso 1, $y+(a+c)=(y+a)+c=0+c=c$, por neutro aditivo.

Paso 6 Como $a+b=a+c$ (hipótesis), entonces $y+(a+b)=y+(a+c)$, por paso 3 y 5, obtenemos que: $y+(a+b)=y+(a+c)$ implica $b=c$.

Proposición 2 *Si $a\cdot b=a\cdot c$, $a\neq 0 \Rightarrow b=c$.*

Ejemplo 2

1. *Si* $3\cdot b=3\cdot c \Rightarrow b=c$.
2. *Si* $5\cdot b=5\cdot c \Rightarrow b=c$.

Demostración:

Paso 1 Sea y el inverso multiplicativo de a $(a\neq 0)$, entonces $y\cdot a=1$.

Paso 2 Consideremos $y\cdot(a\cdot b)=(y\cdot a)\cdot b$, por asociatividad.

Paso 3 Del paso 1, $y\cdot(a\cdot b)=(y\cdot a)\cdot b=1\cdot b=b$, por neutro multiplicativo.

Paso 4 Por otro lado $y\cdot(a\cdot c)=(y\cdot a)\cdot c$, por asociatividad.

Paso 5 Del paso 1, $y \cdot (a \cdot c) = (y \cdot a) \cdot c = 1 \cdot c = c$, por neutro aditivo.

Paso 6 Como $a \cdot b = a \cdot c$ (hipótesis), entonces $y \cdot (a \cdot b) = y \cdot (a \cdot c)$, por paso 3 y 5, obtenemos que: $y \cdot (a \cdot b) = y \cdot (a \cdot c)$ implica $b = c$.

Proposición 3 $(-(-a)) = a$.

Ejemplo 3

1. $(-(-2)) = 2$.
2. $(-(-5)) = 5$.
3. $(-(-7)) = 7$.

Demostración:

Paso 1 Se pide mostrar que el inverso aditivo de $-a$, es a.

Paso 2 Se sabe que, para a existe $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

Paso 3 El paso 2, también quiere decir que, el inverso aditivo de $-a$, es a.

Paso 4 Entonces, por notación del inverso aditivo $-(-a) = a$.

Proposición 4 $a - b = 0, \Leftrightarrow a = b$.

Ejemplo 4

1. $3 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 3$.
2. $4 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 = 4$.
3. $3 - 5 = -2 \Leftrightarrow 3 \neq 5$.

Demostración:

Paso 1 Hay que mostrar dos cosas, primero que $a - b = 0, \Rightarrow a = b$, y segundo que $a = b, \Rightarrow a - b = 0$.

Paso 2 La segunda parte se sigue al sustituir $a = b$, entonces $a - b = a + (-b) = a + (-a) = 0$.

Paso 3 El paso 2, se sigue al sumar a ambos lados el inverso aditivo de $-b$ a la igualdad $a - b = 0$, entonces obtenemos $a - b + b = b$, es decir $a = b$.

Proposición 5 $a(b-c) = ab - ac$.

Ejemplo 5

1. $2(4-2) = 2(2) = 4 \Leftrightarrow 2(4-2) = 2(4) - 2(2) = 8 - 4 = 4$.

2. $2(4-2) = 2(2) = 4 \Leftrightarrow 2(4-2) = 2(4) - 2(2) = 8 - 4 = 4$.

3. $2(4-2) = 2(2) = 4 \Leftrightarrow 2(4-2) = 2(4) - 2(2) = 8 - 4 = 4$.

Demostración:

Paso 1 Por definición tenemos que $a(b-c) = a(b+(-c))$.

Paso 2 Por distributividad y como el inverso aditivo de ac es $a(-c)$, tenemos $a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab - ac$.

Proposición 6 $a \cdot (0) = 0$.

Ejemplo 6

1. $2(0) = 0$.

2. $3 \cdot 0 = 0$.

3. $4\,0 = 0$.

Demostración:

Paso 1 De la anterior proposición, si $b = c$, tenemos $a(b-b) = ab - ab$.

Paso 2 Por lo tanto, $a \cdot (0) = 0$.

Proposición 7 $b \neq 0, \quad a \cdot b = 1, \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$.

Ejemplo 7

1. $2 \cdot a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.
2. $5 \cdot a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$.
3. $7 \cdot a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{7}$.

Demostración:

Paso 1 Si $ab = 1$, por unicidad del inverso multiplicativo, entonces $a = \frac{1}{b}$.

Paso 2 Si $a = \frac{1}{b}$, entonces $a \cdot b(\frac{1}{b}) = a \cdot 1 = a$, por otro lado $1 \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$, por lo tanto $a = \frac{1}{b}$. Otra forma de decir lo mismo, es multiplicar en ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{b}$.

Proposición 8 $(-a)(b) = -(ab)$.

Ejemplo 8

1. $(-2)(3) = -(2 \cdot 3) = -6$.
2. $(-5)(3) = -(5 \cdot 3) = -15$.
3. $(-2)(-1) = -(2 \cdot -1) = 2$.

Demostración:

Paso 1 Basta ver que el inverso aditivo de ab es $(-a)b$.

Paso 2 En efecto $ab + ((-a)b) = (a + (-a))b = 0 \cdot b = b$.

Paso 3 Por unicidad del inverso aditivo se demuestra la proposición.

Proposición 9 $(-a)(-b) = ab$.

Ejemplo 9

1. $(-2)(-3) = 2 \cdot 3 = 6.$

2. $(-5)(-3) = 5 \cdot 3 = 15.$

3. $(-2)(-(-1)) = 2 \cdot -1 = -2.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue de $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$ proposición.

Proposición 10 $-(a+b) = -a-b.$

Ejemplo 10

1. $-(2+3) = -2-3 = -5.$

2. $-(3+4) = -3-4 = -7.$

3. $-(1+3) = -1-3 = -4.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue al mostrar que el inverso de $a+b$ es $-a-b$.

Paso 2 $-a-b+a+b = -a+a-b+b = 0.$

Paso 3 Por unicidad del inverso aditivo, entonces $-(a+b) = -a-b$.

Proposición 11 $-(a-b) = -a+b.$

Ejemplo 11

1. $-(2-3) = -2+3 = 1.$

2. $-(3-4) = -3+4 = 1.$

3. $-(1-3) = -1+3 = 2.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue al mostrar que el inverso de $a-b$ es $-a+b$.

Proposición 12 *Si* $a,b \neq 0, \quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Ejemplo 12

1. $(2\cdot 3)^{-1} = 2^{-1}3^{-1} = \frac{1}{6}$.
2. $(4\cdot 2)^{-1} = 4^{-1}2^{-1} = \frac{1}{8}$.
3. $(7\cdot 5)^{-1} = 7^{-1}5^{-1} = \frac{1}{35}$.

Demostración:

Paso 1 Se sigue al mostrar que el inverso multiplicativo de $(ab)^{-1}$ es $a^{-1}\cdot b^{-1}$.

Proposición 13 *Si* $a,b \neq 0, \quad (\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$.

Ejemplo 13

1. $(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$.
2. $(\frac{5}{4})^{-1} = \frac{4}{5}$.
3. $(\frac{6}{7})^{-1} = \frac{7}{6}$.

Demostración:

Paso 1 Se sigue al mostrar que el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Proposición 14 *Si* $b,d \neq 0, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Ejemplo 14

1. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \Leftrightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2.$

2. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$

3. $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}, \Leftrightarrow 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue al multiplicar ambos lados de la igualdad por db.

Proposición 15 *Si* $b, c \neq 0,$ $\quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$

Ejemplo 15

1. $\frac{10}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}.$

2. $\frac{14}{6} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{7}{3}.$

3. $\frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4}.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue al usar que $(bc)^{-1} = b^{-1}c^{-1}$, y conmutatividad.

Proposición 16 *Si* $b, d \neq 0,$ $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$

Ejemplo 16

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3}.$

2. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 5}.$

3. $\frac{3}{2} + \frac{1}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 7}.$

Demostración:

Paso 1 Se sigue al usar multiplicación por 1, conmutatividad, asociatividad.

Proposición 17 *Si* $b, d \neq 0$, $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Ejemplo 17

1. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3}$.

2. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5}$.

3. $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2}$.

Demostración:

Paso 1 Se sigue al usar conmutatividad, asociatividad.

4.2. Propiedades de orden de los Números Reales

Axiomas de Orden de los números reales.

1. Existe un conjunto P de números positivos.
2. (Ley de tricotomía) Para todo número real a se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones.
   a) $a = 0 \notin P$.
   b) $a \in P$.
   c) $-a \in P$.
3. (Cerradura aditiva) Si $a, b \in P$, entonces $a + b \in P$.
4. (Cerradura multiplicativa) Si $a, b \in P$, entonces $a \cdot b \in P$.

Notaciones:

1. $a > b$, significa que $a - b \in P$.
2. $a < b$, significa que $b > a$.
3. $a \geq b$, significa que $a > b \in P$ ó $a = b$.
4. $a \leq b$, significa que $a < b \in P$ ó $a = b$.

Proposición 18 *Propiedad de tricotomía. Para todos dos números reales* a, b, *se verifica una y sólo una de las siguientes relaciones:*

1. $a < b$.
2. $b < a$.
3. $a = b$.

Demostración:

Paso 1 Se considera a $x = b - a$, y se aplican los axiomas de orden.

a) Si $x = 0$, entonces $a = b$.

b) Si $x > 0$, entonces $b > a$.

c) Si $x > 0$, entonces $b < a$.

Propiedades de Orden.

Proposición 19 *Propiedad transitiva,* $a < b$ *y* $b < c$*, entonces* $a < c$.

Ejemplo 18

1. $2 < 3$ *y* $3 < 5$, *entonces* $2 < 5$.

2. $-1 < 0$ *y* $0 < 2$, *entonces* $-1 < 2$.

3. $-2 < -1$ *y* $-1 < 0$, *entonces* $-2 < 0$.

Demostración:

Paso 1 Como $a < b$, entonces $b - a \in P$, como $b < c$, entonces $c - b \in P$.

Paso 2 Entonces, sumando $(b-a) + (c-b) \in P$, así $c - a \in P$.

Paso 3 Del paso anterior, $c > a$.

Proposición 20 *Si* $a < b$, *entonces* $a + c < b + c$.

Ejemplo 19

1. *Si* $2 < 3$, *entonces* $2 + 3 < 3 + 3$.

2. *Si* $-2 < -1$, *entonces* $-2 + 2 < -1 + 2$.

3. *Si* $3 < 4$, *entonces* $3 - 5 < 4 - 5$.

Demostración:

Paso 1 Como $a < b$, entonces $b - a \in P$.

Paso 2 Pero $b - a = b - a + c - c = (b - c) - (a + c)$.

Paso 3 Por lo tanto $a + c < b + c$.

Proposición 21 *Si* $a < b$, $c > 0$, *entonces* $ac < bc$.

Ejemplo 20

1. *Si* $2 < 3$, $2 > 0$, *entonces* $2 \cdot 2 < 3 \cdot 2$.

2. *Si* $3 < 4$, $3 > 0$, *entonces* $3 \cdot 3 < 4 \cdot 3$.

3. *Si* $-1 < 1$, $5 > 0$, *entonces* $-1 \cdot 5 < 1 \cdot 5$.

Demostración:

Paso 1 Como $a < b$, entonces $b - a \in P$.

Paso 2 Par axioma de orden y como $c \in P$, entonces $c(b-a) \in P$.

Paso 3 Es decir, $cb - ca \in P$, $ac < bc$.

Proposición 22 *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$.

Ejemplo 21

1. *Si* $2 \neq 0$, $2^2 > 0$

Demostración:

Paso 1 Tenemos dos casos, si $a > 0$ o si $a < 0$.

Paso 2 Si $a > 0$, por cerradura $a \cdot a = a^2 > 0$.

Paso 2 Si $-a > 0$, por cerradura $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$.

Proposición 23 $1 > 0$.

Demostración:

Paso 1 Se sigue de la proposición anterior y de que $(-1)(-1) = 1$.

Proposición 24 *Si* $a < b$, $c < 0$, *entonces* $ac > bc$.

Ejemplo 22

1. *Si* $2 < 3$, $-1 > 0$, *entonces* $2 \cdot -1 > 3 \cdot -1$.

2. *Si* $3 < 4$, $-3 < 0$, *entonces* $3 \cdot -3 > 4 \cdot -3$.

3. *Si* $-1 < 1$, $-2 < 0$, *entonces* $-1 \cdot -2 > 1 \cdot -2$.

Demostración:

Paso 1 Si $a < b$, entonces $b - a > 0$.

Paso 2 Si $c < 0$, entonces $-c > 0$.

Paso 3 Entonces $-c(b-a) \in P$.

Paso 4 O sea $ac - bc > 0$, entonces $ac > bc$.

Proposición 25 *Si* $a < b$, *entonces* $-a > -b$.

Ejemplo 23

1. *Si* $2 < 3$, *entonces* $-3 < -2$

2. *Si* $1 < 5$, *entonces* $-5 < -1$

3. *Si* $4 < 5$, *entonces* $-5 < -4$

Demostración:

Paso 1 Se sigue $b - a > 0$, entonces $(-1)(b-a) < 0$.

Proposición 26 *Si* $ab > 0$, *entonces ambos son positivos ó negativos.*

Ejemplo 24

1. *Si* $2 \cdot 3 > 0$, *entonces* $2 > 0, 3 > 0$

2. *Si* $2 \cdot 5 > 0$, *entonces* $2 > 0, 5 > 0$

3. *Si* $2 \cdot 3 > 0$, *entonces* $-2 < 0, -3 < 0$

Demostración:

Paso 1 Par contradicción al suponer que $a > 0$ y $b < 0$.

Proposición 27 *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a+b < c+d$.*

Ejemplo 25

1. *Si* $2 < 3$*, y* $4 < 5$*, entonces* $2+3 < 3+5$.
2. *Si* $-2 < -1$*, y* $-3 < -2$*, entonces* $-2-3 < -1-2$.
3. *Si* $2 < 5$*, y* $-2 < -1$*, entonces* $2-2 < 5-1$.

Demostración:

Paso 1 Sumando ambos lados de las desigualdades.

Ejercicios:

1. $1^{-1} = 1$, sugerencia: mostrar que el inverso del 1 es 1, por definición.
2. $-(a+b) = -a-b$, sugerencia: mostrar que $-a-b$ es inverso aditivo de $a+b$.
3. $-(a-b) = -a+b$, sugerencia: mostrar que $-a+b$ es inverso aditivo de $a-b$.
4. $(a-b)+(b-c) = a-c$, sugerencia: por asociatividad.
5. $b, d \neq 0, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$, sugerencia: igual que el caso positivo.
6. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$, sugerencia: se sigue de la igualdad $a \cdot a^{-1} = 1$.
7. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$, sugerencia: se sigue al multiplicar por $a^{-1}b^{-1}$.
8. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$, sugerencia: se hace por casos.
9. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ con $a = c$, entonces $b = c$.
10. Si para todo número h positivo se cumple que $0 \leq x < h$, entonces $x = 0$, sugerencia: se hace por contradicción.
11. Reducir las siguientes operaciones, mencionando que propiedad de campo de los reales se aplica.

    a) $(a+b+c)^2$

    b) $((x+y)^{-1}+c^{-1})^{-1}$

    c) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}+\frac{2}{5}}$.

    d) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\right)^{-1}}$.

e) $\dfrac{\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)^{-1}}{\frac{2}{7}+\frac{2}{5}}$.

f) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{9}+\frac{3}{5}}-\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}+\frac{5}{2}}$.

4.3. Exponentes en los Números Reales

Definición 9 *Si $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}$, definimos $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ donde son n a_s.*

Propiedades básicas sobre potencias de números reales

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. Si $a \neq 0$, $a^m/a^n = a^{m-n}$
3. $(ab)^m = a^m b^m$
4. Si $b \neq 0$, $(\frac{a}{b})^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$

Definición 10 *Si a es un número real, $a \neq 0$, $a^0 = 1$.*

Definición 11 *Si a es un número real, $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.*

Mostrar las siguientes afirmaciones de potencias

1. Si $a \neq 0$, $a^0 a^{-n} = a^{-n}$
2. $a^{-n} a^{-m} = a^{-(n+m)}$
3. $a^m a^{-n} = a^{m-n}$
4. Si $a \neq 0$, $\dfrac{a^0}{a^n} = a^{-n}$
5. Si $a \neq 0$, $\dfrac{a^0}{a^{-n}} = a^n$
6. Si $a \neq 0$, $\dfrac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{m-n}$
7. Si $a \neq 0$, $(a^0)^n = 1$
8. Si $a \neq 0$, $(a^{-n})^m = a^{-nm}$

9. Si $a \neq 0$, $(a^{-n})^{-m} = a^{nm}$

Definición 12 $\sqrt[n]{a} = x$ *si* $x^n = a$

Propiedades de potencias como raíces

1. $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$
2. Si $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $n \neq 0$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
6. $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

4.4. Valor Absoluto en los Números Reales

Definimos el valor absoluto de un número real a como $|a|$ donde:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Propiedades básicas del valor absoluto

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$

Proposición 28 $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Proposición 29 $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ *ó* $b \leq a$

4.4.1. Intervalos de números reales

En los números reales podemos definir los siguientes intervalos o conjuntos.

1. Intervalo abierto $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$
2. Intervalo cerrado $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
3. Intervalo semi-abierto (ó semi-cerrado) $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
4. Intervalo semi-abierto (ó semi-cerrado) $[a,+\infty) = \{x \mid a \leq x\}$
5. Intervalo abierto no acotado $(-\infty,a) = \{x \mid x < a\}$

4.4.2. Distancia entre números reales

Definición 13 *La distancia entre dos números reales se define como* $d(a,b) = |a-b|$.

Ejercicios:

1. Encontrar los puntos que distan al 3 en menos de 2.
2. Encontrar los puntos que distan al -1 en menos de 4.
3. Encontrar los puntos que distan al 0 en más de de 1.
4. Encontrar los puntos que distan al 2 en más de de 5.
5. Resolver la desigualdad $|x-2| < 6$
6. Resolver la desigualdad $|3x-2| < 5$
7. Resolver la desigualdad $|2x+3| < 6$
8. Resolver la desigualdad $|2x-5| > 7$
9. $5x-2 \leq 11x-14$
10. $3x+2 \leq 8x+5 \leq 3x+10$
11. $\frac{1}{4}x < \frac{5}{4}x - 4 < \frac{1}{4}x - 6$
12. $3-2x \leq 7x-1 < 5x+9$
13. $(x-\pi)(x+4) \leq 0$
14. $x^2+2x-14 > 1$
15. $(x-1)(x+2)(7-x) \geq 0$
16. $x^3+x^2-6x > 0$
17. $\frac{1000}{x^2-25} \leq 0$
18. $x^2-5x+4 > 4$

19. $(x^2-36)(x+3) \geq 0$
20. $\dfrac{3x+1}{x-2\pi} \leq 0$
21. $\dfrac{2}{x+3} > \dfrac{1}{x-1}$
22. $x^2+2x-14 > 1$
23. $x^3+4x^2-21x < 0$
24. $(x-5)(x+3)(-2-x) < 0$
25. $2x^3-3x^2-2x+3 \leq 0$
26. $\dfrac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$
27. $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{3}{x+1}$
28. $\dfrac{x}{2x-1} \geq \dfrac{3}{x+2}$
29. $\dfrac{x}{2x-1} \geq \dfrac{3}{x+2}$
30. $|\frac{4}{7}x| = \dfrac{32}{14}$
31. $|3x-11| = 15$
32. $|4+|x+5|| = 5$
33. $|6x-3| = -2$
34. $|7x-3| = |2x+9|$
35. $|4x+1| = |2x-3|$
36. $|(x+3)^2| = 25$
37. $|3x+2x^3-6x| < -5$
38. $|3x-1| < 11$
39. $|6x-3| \geq 15$
40. $2 < |x-6| < 4$
41. $4 < |x-5| \leq 15$
42. $|7x-3| < |2x|$
43. $|-2x+7| \leq |5x-2|$
44. $|\dfrac{x+5}{x-4}| \leq 3$