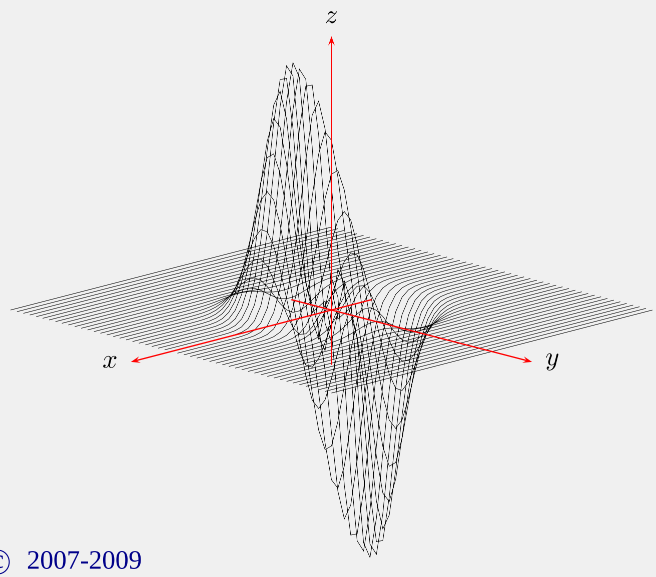
MathCon

The Mathematics Firm

Funciones Reales



Contenido

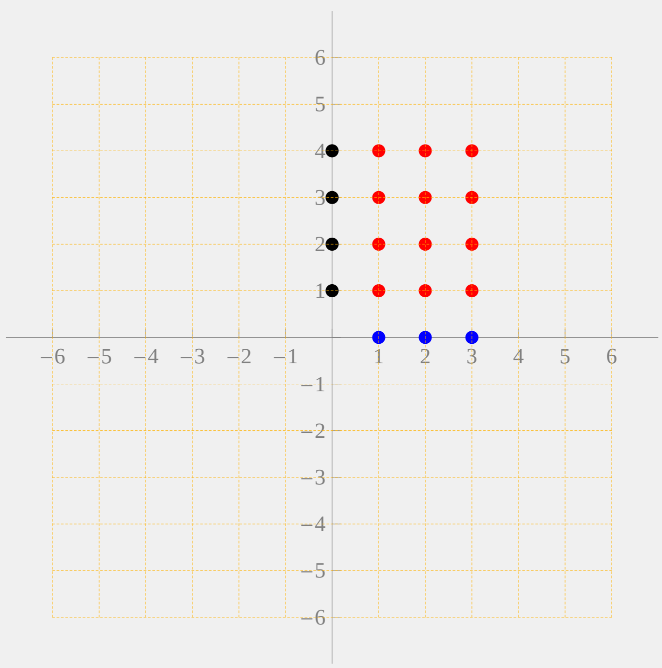
1

Introducción

1.1. Definición de función

Definición 1 *Sean A, B dos conjuntos diferentes del vacío, entonces se define al producto cartesiano como el conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A,\ b \in B\}$$



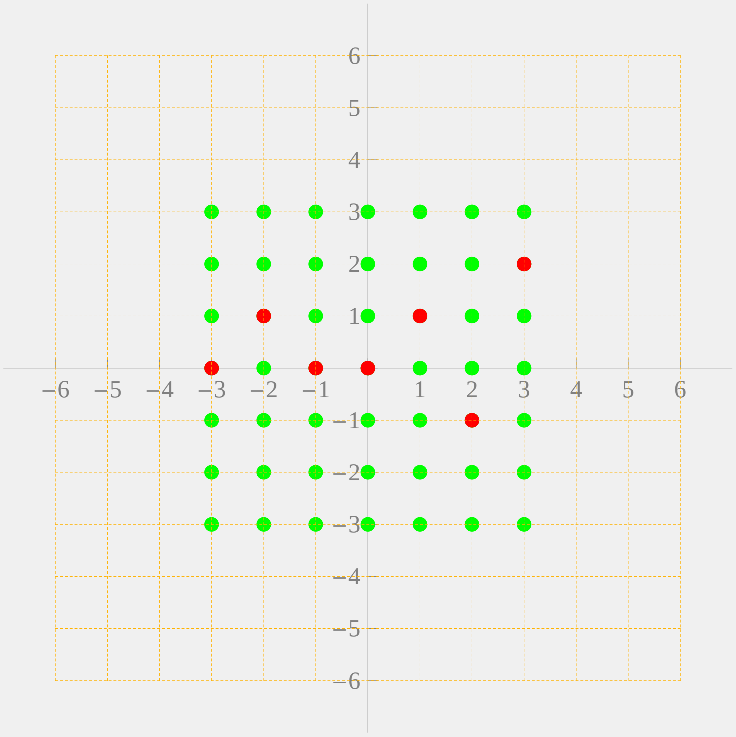
$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\},$

A $\times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

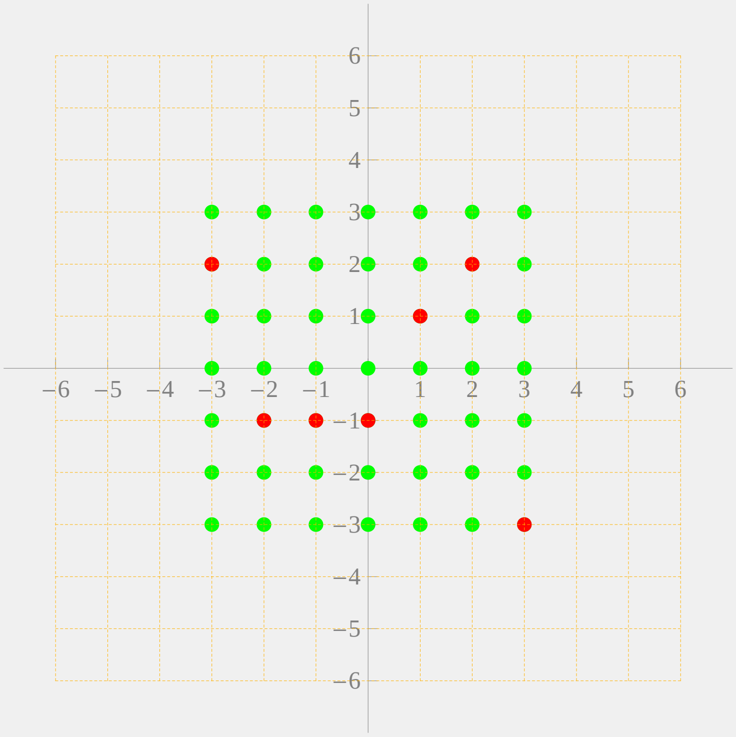
Definición 2 *Sea R un subconjunto de un producto cartesiano $A \times B$, R se llama relación.*

Definición 3 *Si $R \subset A \times B$ es una relación tal que $(a, b), (a, c) \in R$ solo sí $b = c$, entonces R se llama función. Al conjunto A se le conoce como dominio y a B contradominio o codominio.*

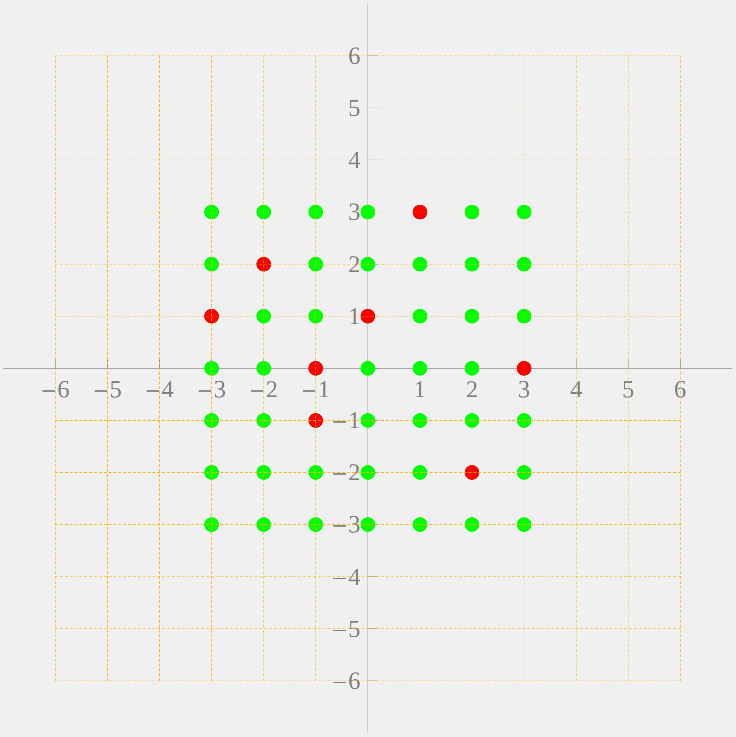
1.1.1. Ejemplos de funciones



Ejemplo de función



Ejemplo de función



Ejemplo de no función

Más ejemplos de funciones:

1. $A = \{$ conjunto de personas $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada persona su estatura en un tiempo fijo.
2. $A = \{$ conjunto de estudiantes $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada estudiante su promedio del bachillerato.
3. $A = \{$ conjunto de estudiantes $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada estudiante el número de libros que ha leído.
4. $A = \{$ conjunto de libros $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada libro el número de páginas que tiene.
5. $A = \{$ conjunto de coches $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada coche el número de kilómetros recorridos.
6. $A = \{$ días del año $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada día el IPC de la BMV.
7. $A = \{$ conjunto de algoritmos $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada algoritmo su tiempo de ejecución en una PC con procesador PIII.
8. $A = \{$ conjunto de edificios $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada edificio el número de ventanas.
9. $A = \{$ conjunto de alimentos $\}$,
   $B = \{$ conjunto de números reales $\}$,
   R asocia a cada alimento la cantidad de proteínas.
10. $A = \{$ conjunto de reales positivos $\}$,
    $B = \{$ conjunto de autos $\}$,
    R asocia al tiempo t la velocidad que lleva.
11. $A = \{$ conjunto de reales positivos $\}$,
    $B = \{$ conjunto de particulas $\}$,
    R asocia al tiempo t la posición de la partícula.
12. $A = \{$ conjunto de reales positivos $\}$,
    $B = \{$ conjunto de aviones $\}$,
    R asocia al tiempo t la velocidad de un avión.
13. $A = \{$ conjunto de paises $\}$,
    $B = \{$ conjunto de reales $\}$,
    R asocia a cada país su PIB.

Propiedades básicas de funciones:

1. Si A es el dominio de una función, B su contradominio, se suele denotar a una función como $f : A \to B$.
2. Una función es sobre si $\forall b \in B$ existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$.
3. Una función es inyectiva si $(a, b), (c, b) \in R$ entonces $a = c$.
4. Si una función es sobre e inyectiva se llama biyectiva.
5. Si $(a, b) \in R$ (es un elemento de una función), también se suele escribir como $a \mapsto b$.
6. Dado un elemento a en el dominio A, y $(a, b) \in f$, entonces b se llama imagen de a y se denota como $f(a) = b$.
7. Dado un elemento $b \in B$, el conjunto de elementos $a \in A$, tales que $f(a) = b$ se llama imagen inversa de b.

Más ejemplos de funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.
   Es la función que a cada número le asocia su cuadrado.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2$.
   Es la función que a cada número le asocia el mismo número más dos.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
   Es la función que a cada número le asocia su raíz cuadrada.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$.
   Es la función que a cada número le asocia su inverso aditivo.
5. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   Es la función que a cada número le asocia su inverso multiplicativo.
6. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
   Es la función que a cada número le asocia su cubo.
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.
   Es la función que a cada número le asocia su valor absoluto.

2
Funciones básicas

Observación: *se suele llamar dominio natural de una función, al conjunto de números reales donde la regla de correspondencia esta definida en los reales. Se suele llamar contradominio natural, a la imagen del dominio natural, también llamado rango o recorrido.*

2.0.2. Clasificación de funciones básicas

Funciones polinomiales

Una función polinomial tiene la forma $y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Funciones lineales

Una función lineal tiene la forma $y = ax + b$

Funciones cuadráticas

Una función cuadrática tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$

Funciones racionales

Una función racional tiene la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x), Q(x)$ son polinomios.

Funciones con raíces cuadradas, cúbicas etc

Una función con raíces cuadradas tiene la forma $y = \sqrt{g(x)}$, o con raíces cúbicas $y = \sqrt[3]{g(x)}$.

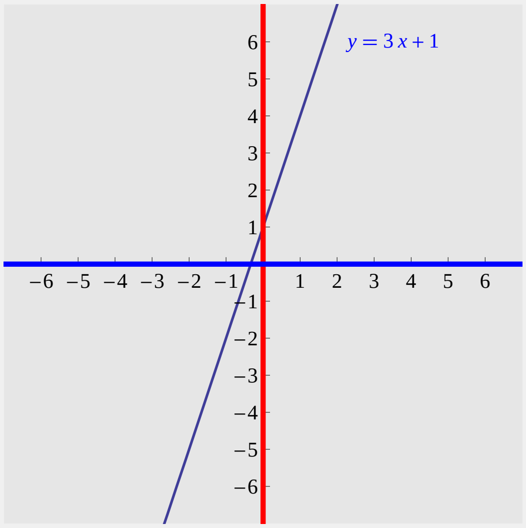
Funciones escalera

Funciones trigonométricas

Funciones exponenciales y logarítmicas

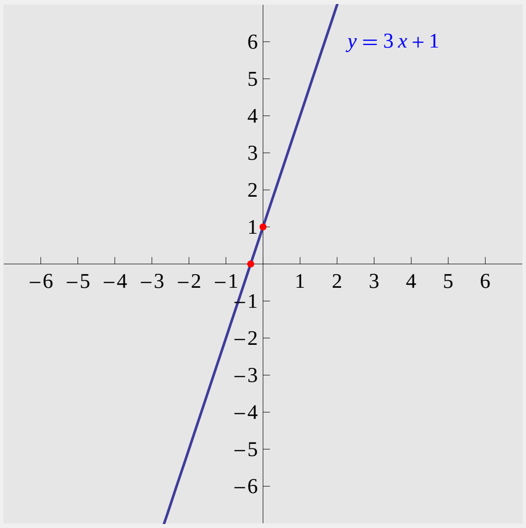
Son de la forma $y = e^x$, $y = \ln(x)$

Ejercicio 1 *Estudiar la función:*
$$y = 3x + 1$$



La función $y = 3x + 1$

1. El dominio natural de la función es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, ya que $3x + 1$ siempre da un número real y.
2. El rango, o imagen del dominio natural son todos los reales, ya que para todo real $y \in \mathbb{R}$ existe un x tal que $f(x) = y = 3x + 1$.



Intersección con los ejes

1. Si $x = 0$, entonces $y = 1$, entonces la gráfica de la recta se intersecta (interseca, según RAE, Real Academia Española) con el eje y en $(0, 1)$.
2. Si $0 = 3x + 1$, entonces $x = -\dfrac{1}{3}$, y la gráfica intersecta al eje x en $(-\dfrac{1}{3}, 0)$. El punto donde la gráfica de la función intersecta al eje x se le llama raíz de la función.

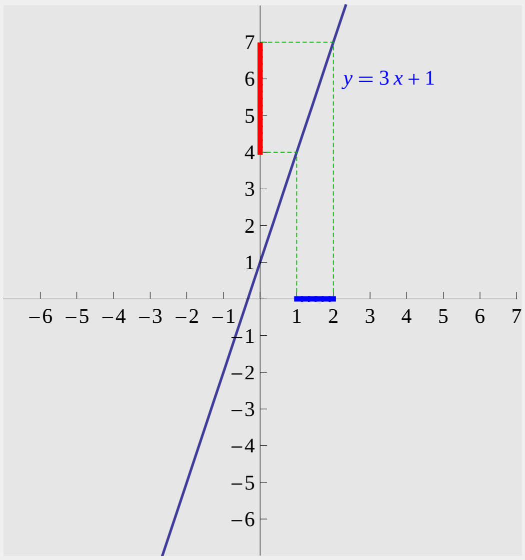


Imagen e imagen inversa:

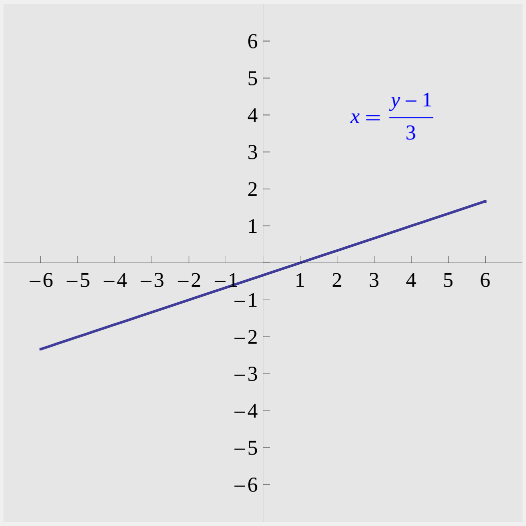
1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[4, 7]$.
2. La imagen inversa del intervalo $[4, 7]$ es el intervalo $[1, 2]$.

Inyectividad

La función $y = 3x+1$, es inyectiva (en $\mathbb{R}$) si puntos $x_1 \neq x_2$ tienen imagenes diferentes, ó si imagenes iguales provienen de puntos x_s iguales. En nuestro caso, si $y_1 = y_2$, entonces $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$, o sea $3x_1 = 3x_2$, y así $x_1 = x_2$. Por lo tanto la función es inyectiva.

Sobreyectividad

La función es sobre si $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ existe x_0 tal que $f(x_0) = y_0$, en nuestro caso, dado y_0 entonces $x_0 = (y_0 - 1)/3$.

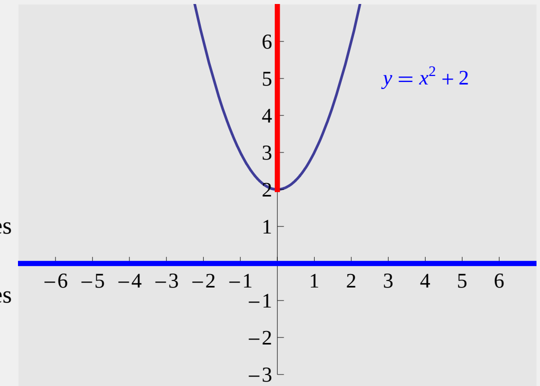


Función inversa

1. Como la función es biyectiva en todo $\mathbb{R}$, entonces existe la función inversa en todo $\mathbb{R}$.
2. La función inversa se obtiene despejando a x de la ecuación $y = 3x + 1$, donde $x = \dfrac{y-1}{3}$.

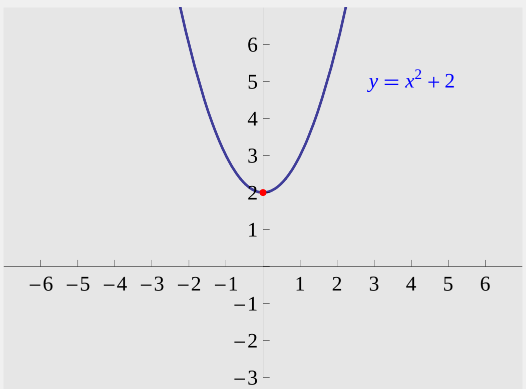
Ejercicio 2 *Estudiar la función:*

$$y = x^2 + 2$$



La función $y = x^2 + 2$

1. El dominio natural de la función son los números reales $\mathbb{R}$, ya que $x^2 + 2$ siempre da un número real y.
2. El rango, o imagen del dominio natural en este caso es el intervalo $[2, \infty)$



Intersección con los ejes

1. Si $x = 0$, entonces $y = 2$, entonces la gráfica de la recta se intersecta (interseca, según RAE) con el eje y en $(0, 2)$.
2. Si $0 = x^2 + 2$, pero no existe un número real que cumpla esta condición por lo tanto, como se observa en la figura, la gráfica no intersecta al eje x. La función no tiene raíces reales.

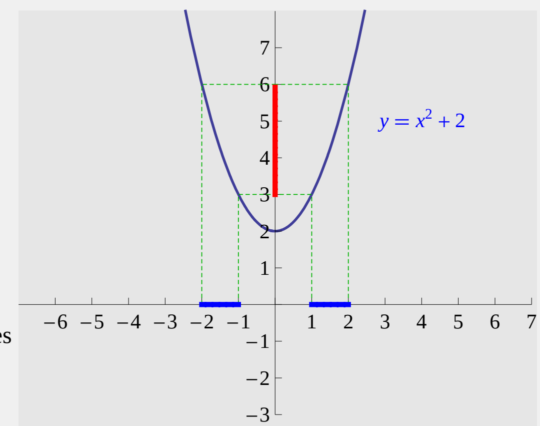


Imagen e imagen inversa:

1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[3, 6]$.
2. En este caso la imagen inversa del intervalo $[3, 6]$ es $[-1, -2] \bigcup [2, 1]$.

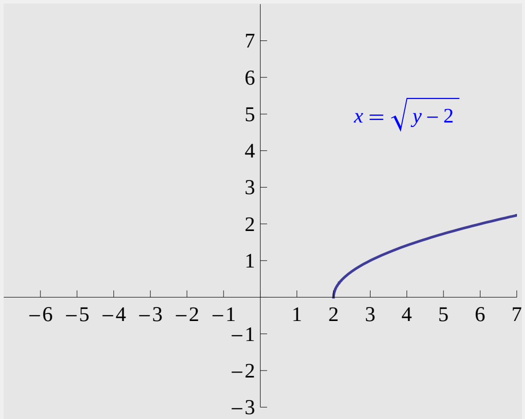
Inyectividad

La función $y = x^2 + 2$, no es inyectiva, ya que existen al menos dos puntos $x_1 \neq x_2$ que tienen imagenes iguales, por ejemplo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ambos tienen como imagen al 3.

Sobreyectividad

La función no es sobre ya que para $y = 0$ no existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Es decir la ecuación $0 = x^2 + 2$ no tiene soluciones reales.

Función inversa Como la función no es biyectiva en todo $\mathbb{R}$, entonces no existe la función inversa en todo $\mathbb{R}$.

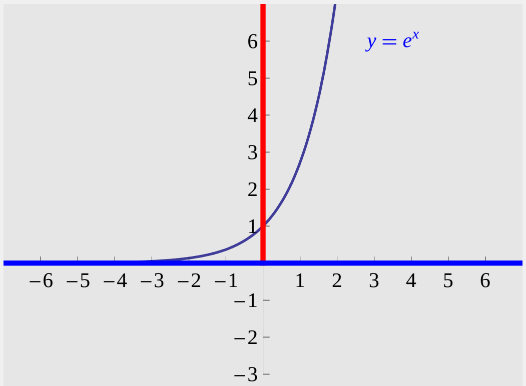


Función inversa

1. Si consideramos a la función sólo con dominio $[0, \infty)$, entonces la función si es inyectiva, y por lo tanto tiene inversa.
2. La función inversa de $y = x^2 + 2$, es $x = \sqrt{y-2}$.

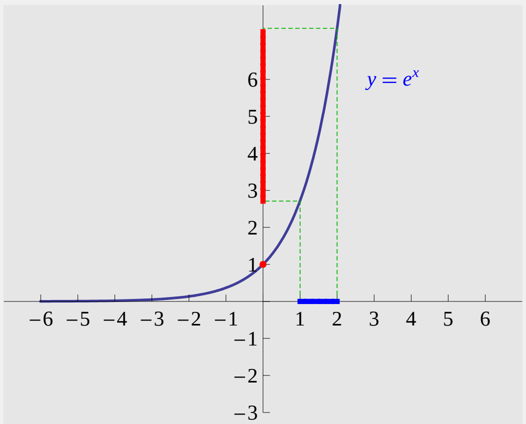
Ejercicio 3 *Estudiar la función:*

$$y = e^x$$



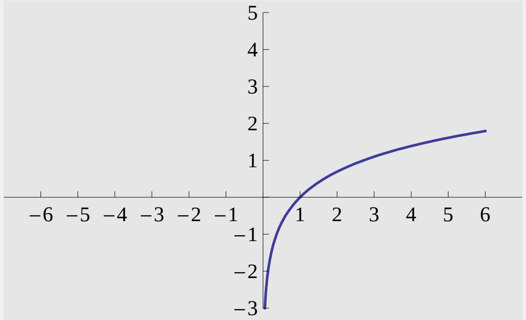
La función e^x

1. El dominio de la función e^x es el conjunto de todos los números reales.
2. La imagen del dominio natural, o el rango de la función e^x es el intervalo $(0, \infty)$.



Intersección con ejes, imagen e imagen inversa

1. La función $y = e^x$ no se intersecta con el eje x, pero si se intersecta con el eje y en $(0, e)$.
2. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[e, e^2] = [2{,}7182, 7{,}3890]$.
3. La imagen inversa del intervalo $[e, e^2]$, es el intervalo $[1, 2]$.

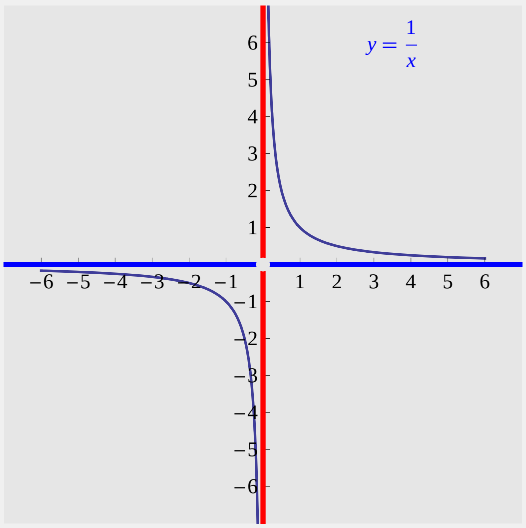


La función inversa de e^x

1. La función $y = e^x$ es biyectiva como $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$..
2. La función inversa de $y = e^x$, se llama función logaritmo, $x = \ln(y)$, con gráfica a la derecha.

Ejercicio 4 *Estudiar la función:*

$$y = \frac{1}{x}$$



La función $\frac{1}{x}$

1. El dominio natural de la función $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. El rango de la función $\frac{1}{x}$ es también $\mathbb{R} - \{0\}$.

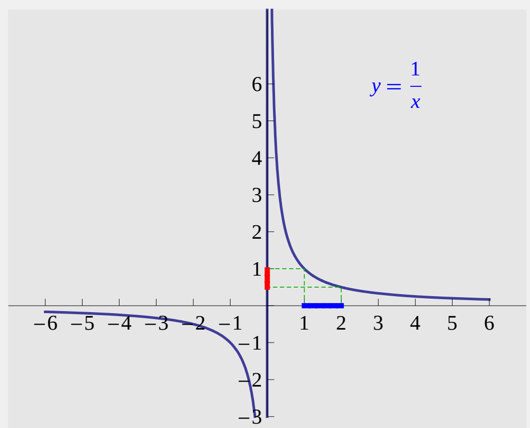


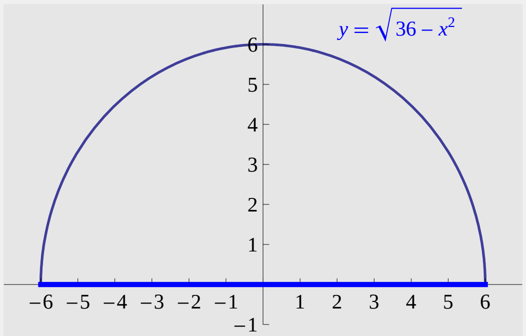
Imagen y imagen inversa

1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[1/2, 1]$.
2. La imagen inversa del intervalo $[1/2, 1]$ es el intervalo $[1, 2]$.

Función inversa La función es biyectiva en $\mathbb{R} - \{0\}$, donde la función inversa es $x = \frac{1}{y}$.

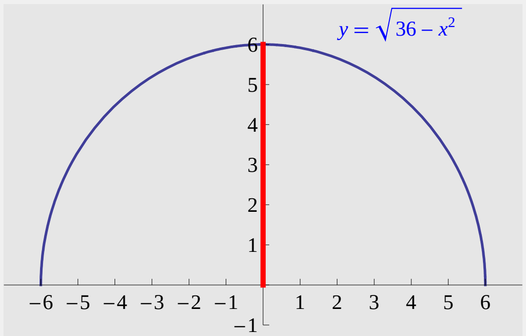
Ejercicio 5 *Estudiar la función:*

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$



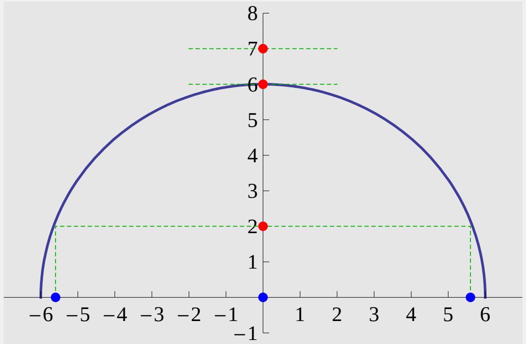
Dominio

1. El dominio de $f(x) = y = \sqrt{36 - x^2}$, es el conjunto de números reales x_s, tales que $36 - x^2 \geq 0$, es decir donde existe una raíz cuadrada real.
2. Resolviendo la desigualdad, $36 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq 6$, es decir $|x| \leq 6$, entonces el dominio es $-6 \leq x \leq 6$ ó escrito como intervalo $[-6, 6]$.



Rango

1. La imagen del dominio(rango) es el conjunto de y_s tales $\exists x$ con $f(x) = y$, en este caso $f(x) = f(-x)$, y si $-6 \leq x \leq 6$, entonces $0 \leq y \leq 6$.



Imagenes inversas

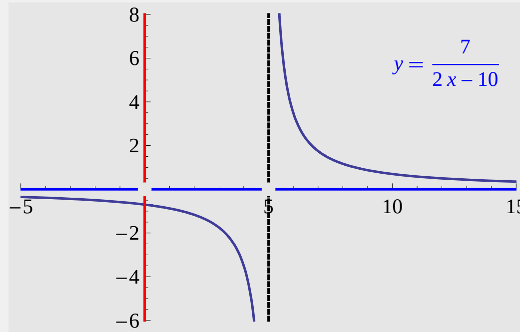
1. $f^{-1}(2) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 2\}$, $2 = \sqrt{36 - x^2}$, por lo tanto $x = \pm\sqrt{32}$, $f^{-1}(2) = \{-\sqrt{32}, \sqrt{32}\}$.
2. $f^{-1}(6) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 6\}$, $6 = \sqrt{36 - x^2}$, por lo tanto $x = 0$, $f^{-1}(6) = \{0\}$.
3. $f^{-1}(6) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 7\}$, $7 = \sqrt{36 - x^2}$, $f^{-1}(7) = \emptyset$.

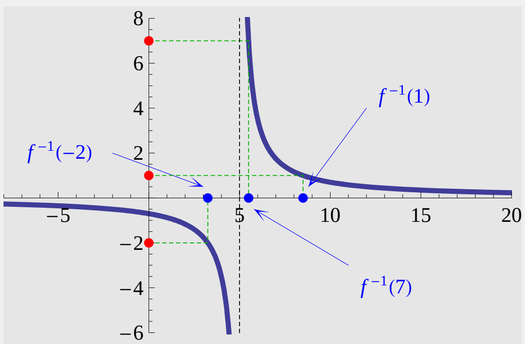
Ejercicio 6 *Estudiar la función:*

$$y = \frac{7}{2x - 10}$$

Dominio de la función

1. El dominio (natural) de la función es el conjunto de números reales, tales que $2x - 10 \neq 0$, es decir $\mathbb{R} - \{5\}$.
2. La imagen del dominio es el conjunto de y_s tales que $y = \dfrac{7}{2x-10}$ recorriendo $x \in \mathbb{R} - \{5\}$. Dado y, entonces $x = \dfrac{7}{2y} + 5$, se puede calcular excepto para $y = 0$, por lo tanto el rango es $\mathbb{R} - \{0\}$.



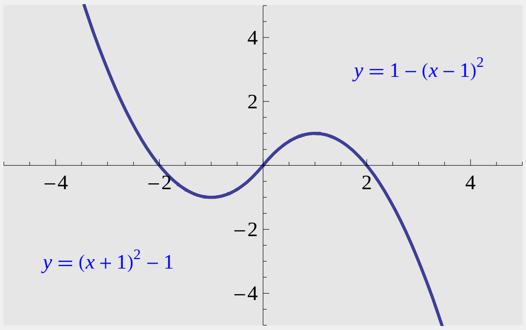


Imagenes inversas

1. $f^{-1}(7)$, $7 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.
2. $f^{-1}(1)$, $1 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{17}{2} = 8{,}5$.
3. $f^{-1}(-2)$, $-2 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$.

Ejercicio 7 *Estudiar la función:*

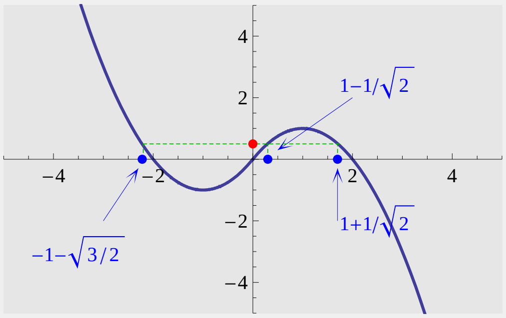
$$y = \begin{cases} -(x-1)^2+1 & \textit{si } x > 0 \\ (x+1)^2-1 & \textit{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Dominio de la función

1. El dominio (natural) de la función es el conjunto de números reales, tales que: $y = \begin{cases} -(x-1)^2+1 & \text{si } x > 0 \\ (x+1)^2-1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ es real, pero es el caso donde el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Imagenes inversas



$f^{-1}(1/2)$ La imagen inversa de $1/2$, es el conjunto $\{x \in D_{f(x)} | f(x) = 1/2\}$

Si $x > 0$

a) $1/2 = -(x-1)^2+1$, entonces, $x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{2}} + 1$.

b) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \sim 1{,}7071$.

c) $x_2 = \dfrac{1}{-\sqrt{2}} + 1 \sim 0{,}2929$.

Si $x \leq 0$

a) $1/2 = (x+1)^2 - 1$, entonces, $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1$.

b) solo la parte negativa $x_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1 \sim -2{,}22$.

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(1/2) = \{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1, \dfrac{1}{-\sqrt{2}} + 1, -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\}$

Combinación de funciones:

1. Sea f una función con dominio natural D_f y g otra función con dominio natural D_g, entonces definimos la función (suma o resta) $f \pm g$ como

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

con dominio $D_f \cap D_g$.

2. Sea f una función con dominio natural D_f y g otra función con dominio natural D_g, entonces definimos la función (producto) $f \cdot g$ como

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

con dominio $D_f \cap D_g$.

3. Sea f una función con dominio natural D_f y g otra función con dominio natural D_g, entonces definimos la función (cociente) f/g como

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

con dominio $D_f \cap (D_g - \{0\})$.

4. Sea f una función con dominio natural D_f y g otra función con dominio natural D_g, entonces definimos la función (composición) $f \circ g$ como

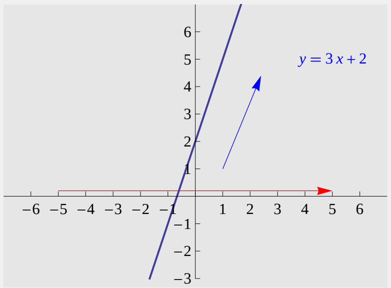
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

con dominio $D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$.

Definición 4 *Definiciones básicas de funciones:*

1. *Una función es estrictamente creciente si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. *Una función es estrictamente decreciente si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.*
3. *Una función es par si $f(x) = f(-x)$.*
4. *Una función es impar si $f(x) = -f(-x)$.*

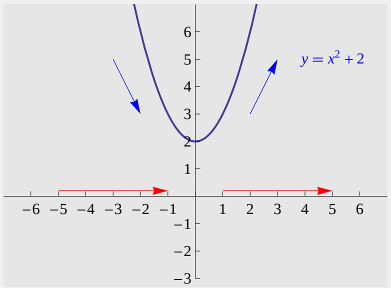
2.0.3. Ejemplos sobre monotonía de funciones



Monotonía de la función $3x + 2$

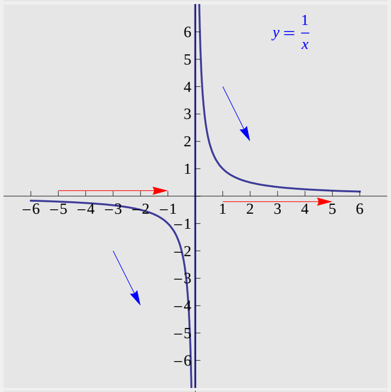
1. La función es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$
   Si $x_1 < x_2$ entonces $3x_1 + 2 < 3x_2 + 2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Monotonía de la función $x^2 + 2$



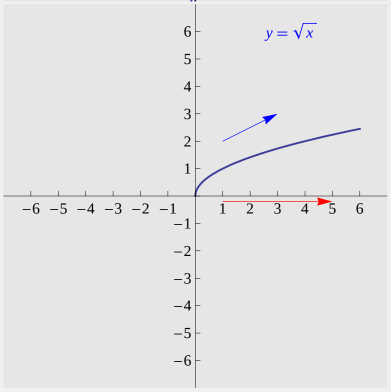
1. La función es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$
   Si $x_1 < x_2$ entonces $(x_1)^2 + 2 < (x_2)^2 + 2$, si $x_1, x_2 > 0$.
2. La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$
   Si $x_1 < x_2$ entonces $(x_1)^2 + 2 > (x_2)^2 + 2$, si $x_1, x_2 < 0$.

Monotonía de la función $\frac{1}{x}$



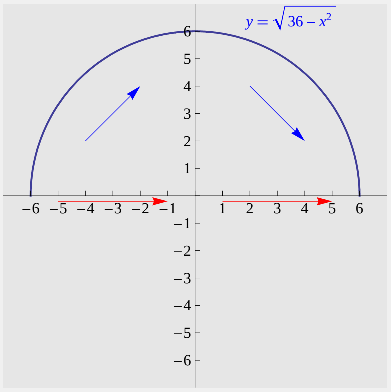
1. La función es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$
   Si $x_1 < x_2$ entonces $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$, si $x_1, x_2 > 0$.
2. La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$
   Si $x_1 < x_2$ entonces $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$, si $x_1, x_2 < 0$.

Monotonía de la función $\sqrt{x}$



1. La función es estrictamente creciente en su dominio $[0, +\infty)$ ya que si $x_1 < x_2$, entonces $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, de lo contrario la función x^2 no seria creciente en los positivos.

Monotonía de la función $\sqrt{36 - x^2}$



1. La función es estrictamente creciente en $[-6, 0)$ ya que si $x_1 < x_2$, entonces $x_1^2 > x_2^2$, por ser negativos, ahora $-x_1^2 < -x_2^2$, y $36 - x_1^2 < 36 - x_2^2$, finalmente por monotonía de la raíz cuadrada $\sqrt{36 - x_1^2} < \sqrt{36 - x_2^2}$.
2. La función es estrictamente decreciente en $[0, 6]$ ya que si $x_1 < x_2$, entonces $x_1^2 < x_2^2$, por ser positivos, ahora $-x_1^2 > -x_2^2$, y $36 - x_1^2 > 36 - x_2^2$, finalmente por monotonía de la raíz cuadrada $\sqrt{36 - x_1^2} > \sqrt{36 - x_2^2}$.

2.0.4. Ejemplos sobre inyectividad y sobreyectividad de funciones

Inyectividad y sobreyectividad de $3x + 2$

Sea $f(x) = 3x + 2$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces:

1. La función es inyectiva, ya que si $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, entonces por propiedades de campo, al restar 2 y dividir por 3, obtenemos $x_1 = x_2$.
2. La función es sobre, ya que dado $y \in \mathbb{R}$ y $y = 3x + 2$ entonces existe $x = (y - 2)/3$ tal que $f(x) = y$ (es posible despejar un único x).

Inyectividad y sobreyectividad de x^2

Sea $f_1(x) = x^2$ con $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces:

1. La función f_1 no es inyectiva, ya que si $(-x)^2 = (x)^2$.
2. La función f_1 tampoco es sobre, ya que dado $y = -1$, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.

Sea $f_2(x) = x^2$ con $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, entonces:

1. La función f_2 no es inyectiva, ya que si $(-x)^2 = (x)^2$.
2. La función f_2 si es sobre, ya que dado $y \in \mathbb{R}^+$, siempre existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = y$, donde $x = y$.

Sea $f_3(x) = x^2$ con $f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, entonces:

1. La función f_3 si es inyectiva, ya que si $(x_1)^2 = (x_2)^2$, entonces $x_1 = x_2$.
2. La función f_3 si es sobre, ya que dado $y \in \mathbb{R}^+$, siempre existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = y$, donde $x = \sqrt{y}$.

Inyectividad y sobreyectividad de $\frac{1}{x}$

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ con $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, entonces:

1. La función f es inyectiva, ya que si $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.
2. La función f no es sobre, ya que dado $y = 0$, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 = \frac{1}{x}$.

2.0.5. Ejemplos sobre composición de funciones

Composición de funciones

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x + 2$, y la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = -2x + 3$. Entonces las composiciones son:

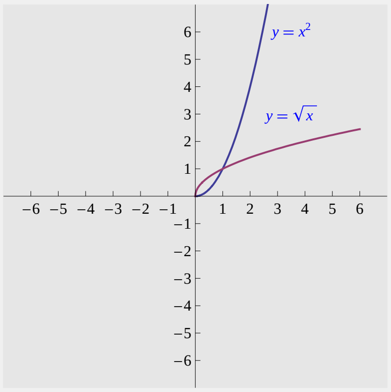
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-2x+3) \\ &= 3(-2x+3)+2 \\ &= -6x+9+2 \\ &= -6x+11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(3x+2) \\ &= -2(3x+2)+2 \\ &= -6x-4+2 \\ &= -6x-2\end{aligned}$$

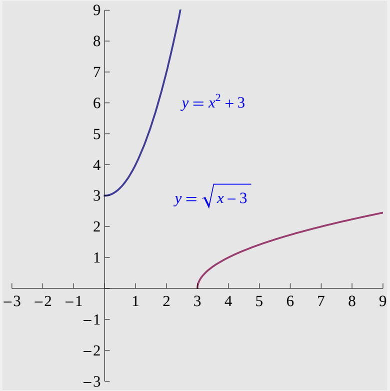
2.0.6. Ejemplos sobre inversa de funciones

Una función $f : A \rightarrow B$ tiene inversa única si es biyectiva, y la inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$, cumple que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x$.

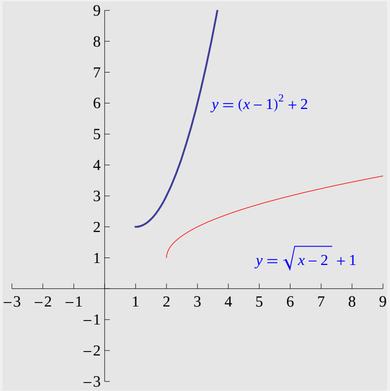
1. La inversa de ua recta es una recta, $y = ax + b$, entonces su inversa es $y = (x - b)/a$.
2. La inversa, de $y = x^2$ donde su dominio es $\mathbb{R}^+$ y su contradominio $\mathbb{R}^+$, es $y = \sqrt{x}$.



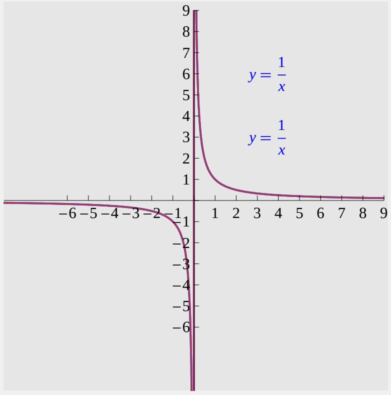
3. La inversa, de $y = x^2 + 3$ donde su dominio es $\mathbb{R}^+$ y su contradominio $[3, +\infty)$, es $y = \sqrt{x - 3}$.



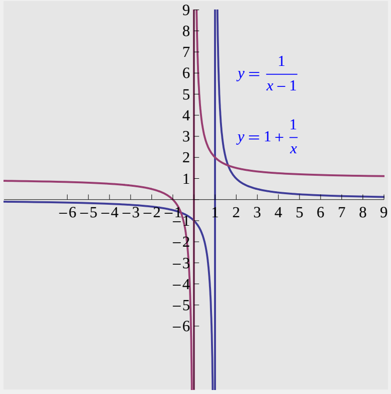
4. La inversa, de $y=(x-1)^2+2$ donde su dominio es $[1,+\infty)$ y su contradominio $[2,+\infty)$, es $y=\sqrt{x-2}+1$.



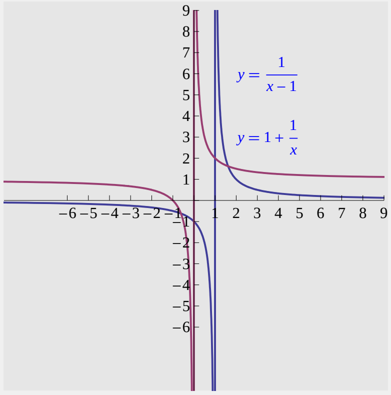
5. La inversa, de $y=\dfrac{1}{x}$ donde su dominio es $\mathbb{R}^*$ y su contradominio $\mathbb{R}^*$, es la misma.



6. La inversa, de $y=\dfrac{1}{x-1}$ donde su dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$ y su rango (imagen del domino natural) es $\mathbb{R}^*$, es $y=\dfrac{1}{x}+1$, con dominio $\mathbb{R}^*$ y rango $\mathbb{R}-\{1\}$.



7. La inversa, de $y=e^x$ donde su dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$ y su rango (imagen del domino natural) es $\mathbb{R}^*$, es $y=\dfrac{1}{x}+1$, con dominio $\mathbb{R}^*$ y rango $\mathbb{R}-\{1\}$.



2.0.7. Uso de funciones en modelos concretos

1. El producto de dos números positivos en 60, expresar la suma de los números en función de uno de ellos.
   Sol: sea $x \cdot y = 60$, entonces $x + y = x + \dfrac{60}{x}$.
2. La suma de dos números no negativos es 1, exprese la suma del cuadrado de uno, con el doble de cuadrado del otro, en función de uno de los números.
   Sol: sea $x + y = 1$, entonces $x^2 + 2y^2 = x^2 + 2(1 - x)^2$.
3. El perímetro de un rectángulo es de 200 metros. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
   Sol: sea $2x + 2y = 200$, entonces $A(x) = x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{2}$.
4. La superficie de un rectángulo es de 300 cm^2. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
   Sol: sea $x \cdot y = 300$, entonces $P(x) = 2x + 2y = 2x + 2(\dfrac{300}{x})$.
5. Dada la recta $x + 2y = 4$, expresar el área del rectángulo inscrito en el primer cuadrante y la recta (con sus lados parte de los ejes, y una esquina un punto de la recta).
   Sol: sea $x + 2y = 4$, entonces $A(x) = x \cdot y = x \cdot \dfrac{4 - x}{2}$.
6. Dada la recta que pasa por el punto $(2, 4), (x, 0), (0, y)$ con $x, y > 0$. Expresar la longitud del segmento en función de x.
   Sol: sea $(x - 2)4/2 + 8 + 2(y - 4)/2 = xy/2$, de donde $4x + 2y = xy$, y así $y = \dfrac{4x}{x - 2}$, entonces $l(x)^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (\dfrac{4x}{x - 2})^2$.
7. Exprese el perímetro de un cuadrado en función de su área.
   Sol: sea $A = x^2$, o sea $x = \sqrt{A}$, entonces $P(x) = 4x = 4\sqrt{A}$.
8. Un alambre de longitud L se corta en dos partes, un trozo del alambre se dobla para formar un cuadrado el otro se usa para formar un círculo. Exprese la suma de las áreas en función de la longitud de un trozo.
9. Un cometa tradicional tiene longitud de sus lados superiores de $20cm$ y $30cm$ de longitude de sus lados inferiores. La transversal horizontal mide x. Exprese el área del cometa en función de x.
10. Se desea construir una caja rectangular abierta de 450 cm^3 de volumen de tal modo que el largo de su base sea el triple de su ancho. Exprese la superficie de la caja en función de su ancho.
11. Un tanque cónico con su punta hacia abajo tiene 5 pies de radio y 15 pies de altura. Al tanque se le bombea agua. Exprese el volumen de agua en función de su profundidad (El volumen de un cono es $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$).

12. Un modelo del crecimiento del catarro, supone que dentro de una población de p personas, la rapidez con que crece la enfermedad es proporcional al número i de infectados, y también a la cantidad $(p - i)$ de personas no infectadas aún. Por lo tanto un modelo matemático es $R(i) = ki(p - i)$ donde $R(i)$ es la rapidez de la infección del virus y $k > 0$ es una constante.

    a) Demuestre que si la población es constante, entonces la enfermedad se extiende con más rapidez cuando exactamente la mitad de la población es portadora del virus.

    b) Suponga que en un pueblo de 10 000 personas hay 125 enfermos el domingo, y el lunes se presentan 37 casos nuevos. Estime el valor de k.

    c) Usando b) determinar los nuevos casos para el martes, miércoles, jueves, viernes y sábado.

13. Dada la línea $y = 2x$, trazemos una línea l perpendicular al eje x y sea P el punto de intersección de l y la recta $2x$, y Q con el eje x. Calcular el área del triángulo en función de x formado por los puntos $(0, 0), P, Q$.

14. Un automóvil A pasa por el punto O y se dirige hacia el sur a una velocidad constante de $40Kph$, un automóvil B pasa por el mismo punto O 1 hora después con rumbo al oeste con una velocidad constante de $60kph$. Exprese la distancia entre los vehículos, en función del tiempo t, contando t a partir del momento que B pasa por O.

15. En un momento $t = 0$, dos aviones tienen una separación vertical de $1km$ y se rebasan con direcciones opuestas. Si los aviones vuelan horizontalmente con velocidades de $700kph$ y $800kph$ exprese la distancia horizontal entre ellos en función de t.

16. Una alberca tiene 1 metro de profundidad en su extremo corto y 4 metros en su extremo hondo, tiene 10 metros de largo y 5 de ancho. Se bombea agua a la alberca, exprese el volumen del agua en la alberca en función de la altura h del agua sobre el fondo.

3

Límites de funciones

Los límites de funciones son una de las partes más complicadas del análisis de funciones. En este reporte presentamos de manera simple algunos de los ejemplos más sencillos para el cálculo de límites.

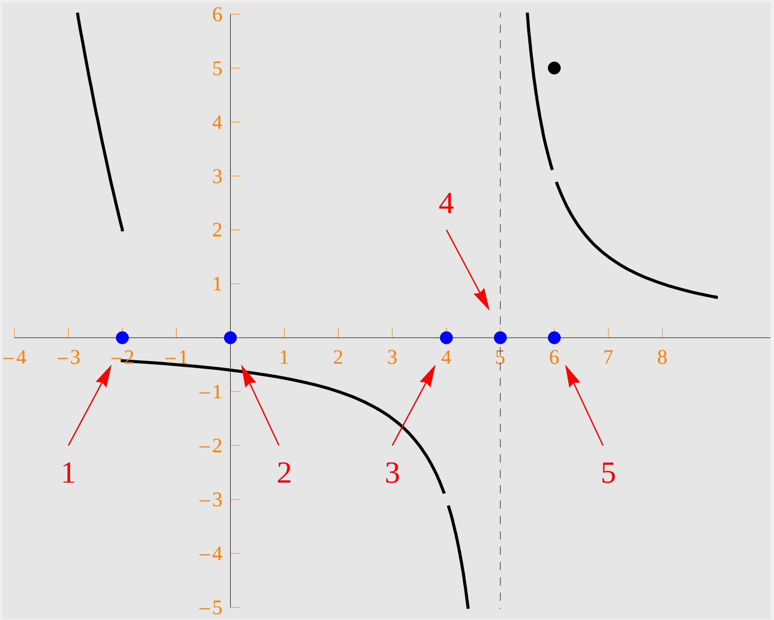
El límite de una función se denota como $\lim_{x \to c} f(x) = b$. La idea general de límite es saber adónde se aproxima la función $f(x)$ cuando x se aproxima a c. Si la función se aproxima a un número real b único, entonces decimos que el límite existe, en otro caso decimos que no existe.

En el siguiente ejemplo observamos algunos de los casos más sencillos sobre límites.

Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ si } x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-5}, \text{ si } 2 < x < 4 \\ \dfrac{3}{x-5}, \text{ si } 4 < x < \infty \\ 5, \text{ si } x = 6 \end{cases}$$

Es decir, la función no esta definida en $x = 4$, la gráfica de esta función se muestra a continuación.



Punto 1 En el punto $x = -2$ de la gráfica de la función, observamos que si nos aproximamos al -2 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a 2. Pero si nos aproximamos a -2 por arriba (por la derecha) la función se aproxima a $-0{,}4$. Por lo tanto $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

Punto 2 En el punto $x = 0$ de la gráfica de la función, observamos que si nos aproximamos al 0 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a $-0{,}6$. Si nos aproximamos a 0 por arriba (por la derecha) la función se aproxima también a $-0{,}6$. Por lo tanto $\lim_{x \to -2} f(x) = 0{,}6$.

Punto 3 En el punto 3, $x = 4$ aunque la función no esta definida, si nos acercamos a 4 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a -3, si nos acercamos a $x = 4$ por arriba (por la derecha), la función también se acerca a $y = -3$. Entonces el límite existe y $\lim_{x \to 4} f(x) = -3$.

Punto 4 En el punto 4, $x = 5$ si nos acercamos a 4 por abajo (por la izquierda), la función se va a $-\infty$, si nos acercamos a $x = 5$ por arriba (por la derecha), la función va a ∞. Entonces el límite no existe.

Punto 5 En el punto 5, $x = 6$ aunque la función esta definida y vale 5. Si nos acercamos a 6 por abajo (por la izquierda), la función se va a 3, si nos acercamos a $x = 6$ por arriba (por la derecha), la función se acerca a 3. Entonces $\lim_{x \to 6} f(x) = 3$.

3.1. Límites con $\epsilon - \delta$

Ejercicio 8 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to 5} x = 5.$$

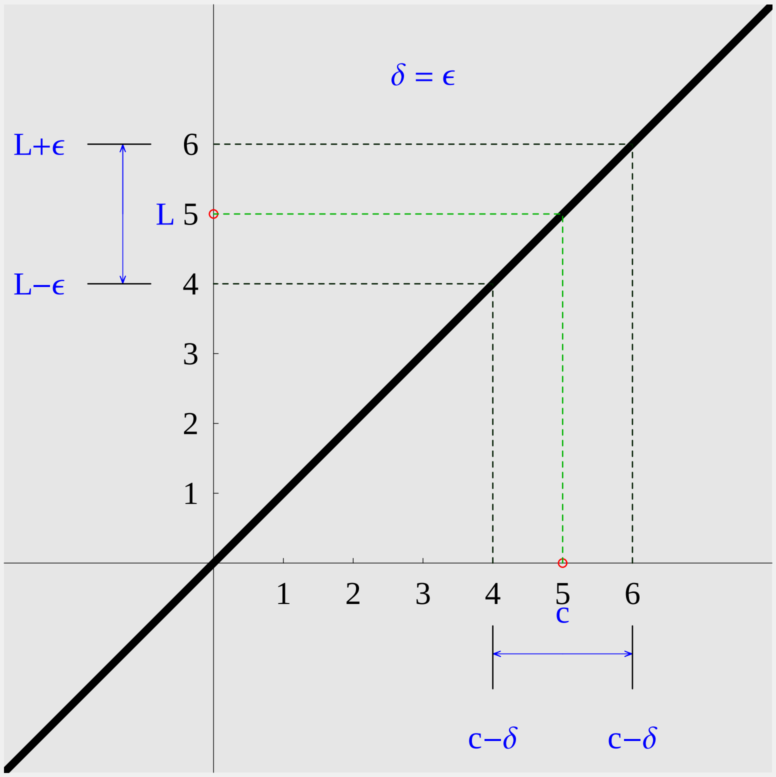


Figura 3.1: $f(x) = x, c = 5, L = 5$.

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x)-L| < \epsilon$, cuando $|x-c| = |x-5| < \delta$. En este caso $|f(x)-L| = |x-5| < \delta$, entonces si $\delta = \epsilon$, obtenemos que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Paso 2 Esto puede apreciarse mejor en la figura 1.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon$, como $|x - c| = |x - 5| < \delta$ es cierto, entonces si $\delta = \epsilon$, también es cierto que $|x - 5| = |f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

Ejercicio 9 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to 1} 5x = 5.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$. Sustituyendo y desarrollando $|f(x) - L| = |5x - 5| = 5|x - 1| < \epsilon$, por otra parte tenemos que $|x - 1| < \delta$, por lo tanto lo primero será cierto si $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$.

Paso 2 Esto puede apreciarse en la figura 2.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, tenemos $|x - c| = |x - 1| < \delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, entonces $5|x - 1| = |5x - 5| < \epsilon$, es decir $|f(x) - L| = |5x - 5| < \epsilon$. $\square$

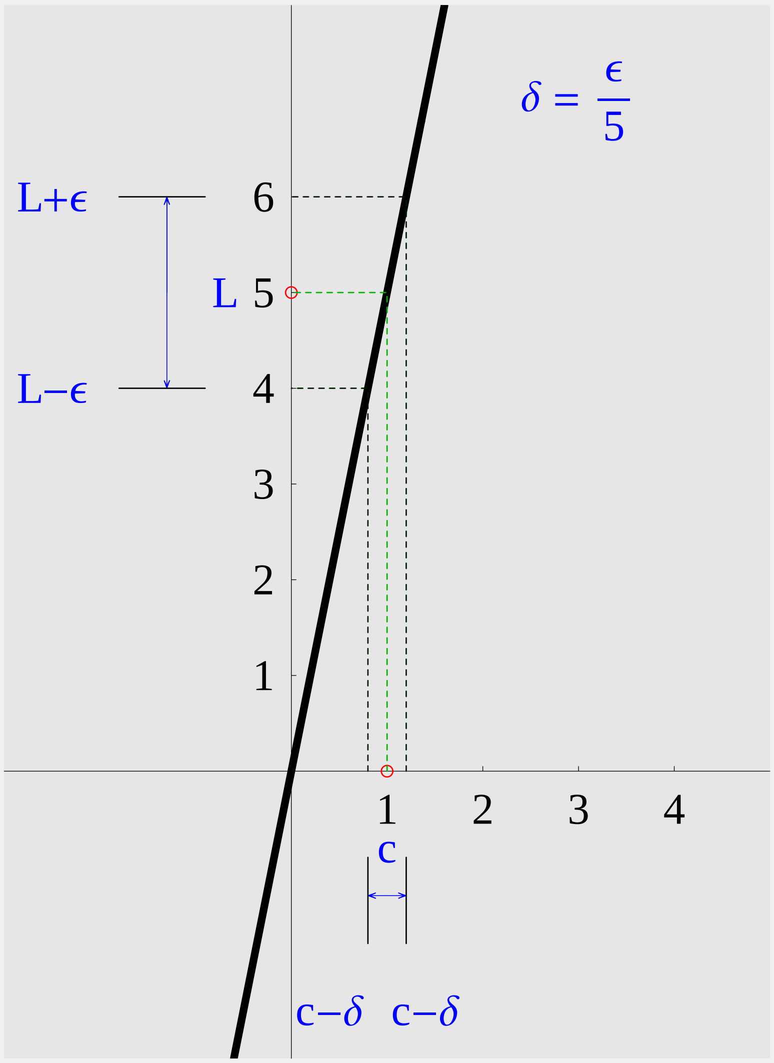


Figura 3.2: $f(x) = 5x, c = 1, L = 5$.

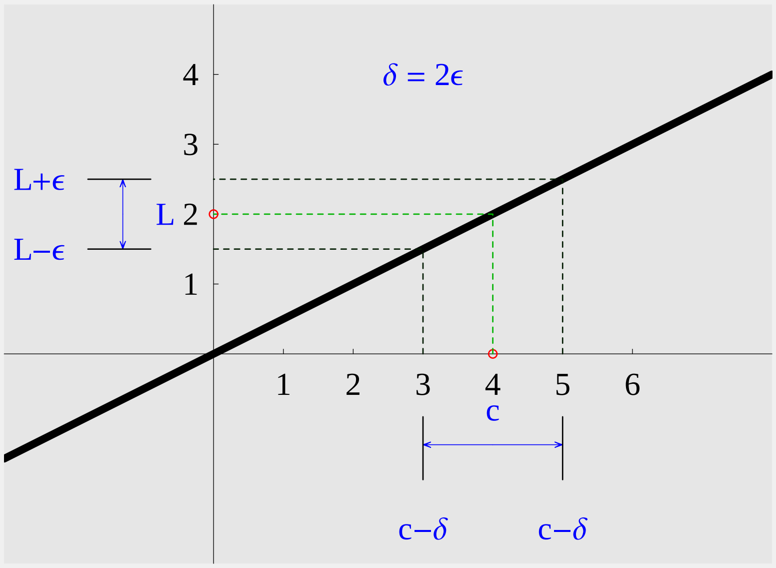


Figura 3.3: $f(x) = x/2, c = 4, L = 2.$

Ejercicio 10 *Demostrar por* $\epsilon - \delta$ *que*

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{2} = 2.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, entonces: $|f(x) - L| = |\frac{x}{2} - 2| = \frac{1}{2}|x - 4| < \epsilon$, por otra parte tenemos que $|x - 4| < \delta$, por lo tanto lo primero será cierto si tomamos $\delta = 2\epsilon$

Paso 2 Esto puede apreciarse mejor en la figura 3.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = 2\epsilon$, como $|x - c| = |x - 4| < \delta = 2\epsilon$, entonces $\frac{1}{2}|x - 4| < \epsilon$, es decir $|f(x) - L| = |\frac{x}{2} - 2| < \epsilon.$ $\square$

Ejercicio 11 *Demostrar por* $\epsilon - \delta$ *que*

$$\lim_{x \to c} ax + b = ac + b.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, entonces. De los problemas anteriores podemos inferir que si tomamos a $\delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, podemos mostrar lo requerido.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, como $|x - c| < \delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, entonces $|ax - ac| < \epsilon$, es decir $|ax - ac + b - b| = |ax + b - (ac + b)| = |f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

Ejercicio 12 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x\to 0} xsen(1/x) = 0.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, sabemos que $|sen(1/x)| \leq 1$ se cumple siempre, por lo tanto $|xsen(1/x)| \leq |x|$.

Paso 1 Ver figura 4.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon$, como $|x - c| = |x| < \delta = \epsilon$, entonces de parte 1, $|xsen(1/x) - 0| \leq |x| < \delta = \epsilon$, es decir $|f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

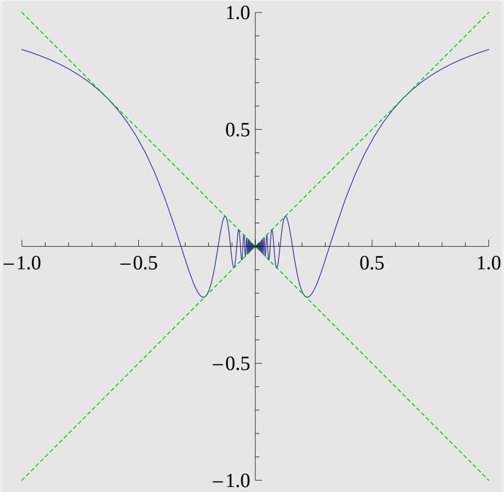


Figura 4: $f(x) = xsen(1/x)$

3.2. Límites con simple evaluación

En muchos casos, calcular un límite es muy simple, por ejemplo si la función es continua. Entonces el límite llega a ser una simple evaluación.

Ejercicio 13 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Parte 1 Para funciones (continuas), donde el punto c esta definida, el límite se encuentra con simple sustitución.

Parte 2 En nuestro caso, $f(1) = 3$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 3$.

Ejercicio 14 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -3} \frac{2}{x+2}.$$

Parte 1 Para funciones (continuas), donde el punto $c = -3$ esta definida, el límite se encuentra con simple sustitución.

Parte 2 En nuestro caso, $f(-3) = -2$, por lo tanto $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2}{x+2} = -2$.

3.3. Límites con una diferencia de cuadrados o factorización

Ejercicio 15 *Encontrar*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 2$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x-2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= (x+2) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es 4.

Ejercicio 16 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= (x-1) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es -2.

Ejercicio 17 *Encontrar*

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = a$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= (x+a) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $2a$.

Ejercicio 18 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 1}{x + 1} &= \frac{(x^2 - x + 1)(x+1)}{x+1} \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es 3.

Ejercicio 19 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} &= \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} \\ &= (2x - 3) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es -5.

Ejercicio 20 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -3$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9} &= \frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{x-2}{x-3} \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{5}{6}$.

Ejercicio 21 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$$

Parte 1 La función no está definida en $x=4$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8} &= \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \\ &= \frac{x-1}{x+2} \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{1}{2}$.

3.4. Límites obtenidos multiplicando por el conjugado

Ejercicio 22 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

Parte 1 La función no está definida en $x=0$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera, multiplicando por el conjugado del numerador así:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ejercicio 23 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 3$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera, multiplicando por el conjugado del numerador así:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\,\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\
&= \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\
&= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}
\end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{1}{4}$.

3.5. Ejercicios

Verificar que los límites siguientes son correctos.

1. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-25} = 10$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-7x+6}{x-1} = -5$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = -5$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+3x-4} = 3/5$
6. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} = 4$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{(2x+1)^2-9}{x-1} = 15$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3-1}{x} = 3$
9. $\lim_{h\to 0} \frac{2(h+1)^3-5(h+1)^2+3}{h} = -4$
10. $\lim_{x\to 2} [\frac{1}{x-2}\,\frac{6}{x^2+2x-8}] = 1/6$
11. $\lim_{x\to 10} [\frac{1}{x-10} - \frac{20}{x^2-100}] = 1/20$
12. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}}{h} = -1/4$
13. $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = 1/6$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}$

15. $\lim\limits_{t\to 25} \dfrac{25-t}{5-\sqrt{t}} = 10$