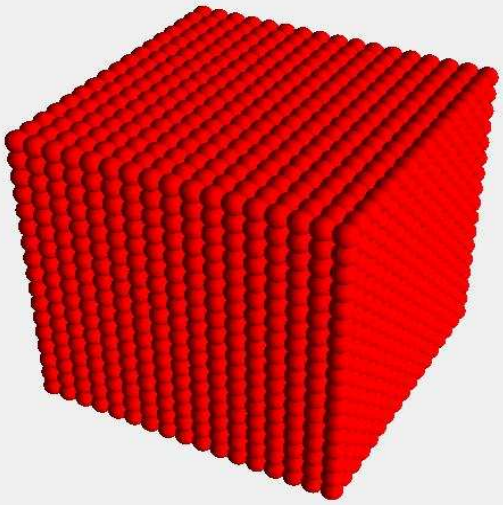
MathCon
The Mathematics Firm

Máximos y Mínimos



MathCon © 2007-2011

Contenido

1
Máximos y mínimos

1.1. Máximos y mínimos

[redacted]

1. Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una pieza rectangular de cartón con ancho de 16 cm y largo de 21 cm. Doblando las esquinas se obtiene la caja, el doblez tiene una longitud de x cm.

    a) La restricción es la medida de la pieza rectangular de cartón de 16×21.

    b) El volumen de la caja es esta dado por $V(x) = (21 - 2x)(16 - 2x)x$.

    c) Al derivar $V'(x)$ obtenemos: $4(3x - 28)(x - 3)$.

    d) Los puntos críticos son $x = 28/3, 3$, peros $28/3$ no está en el dominio de la función.

    e) Por lo tanto el máximo volumen lo alcanza cuando $x = 3$.

2. Se desea construir un recipiente en forma de cilindro circular como una lata de refresco sin y con tapa, con un volumen de 64 pul^3. Hallar las dimesiones de manera que la cantidad de lata sea mínima.

    a) El volumen de un cilindro es $\pi r^2 h = 64$ que es la restricción.

    b) El material es el área del cilindro $A = 2\pi r h + \pi r^2$ en el caso de no tener tapa.

    c) Despejamos h del volumen $h = 64/(\pi r^2)$, sustituyendo en $A = 2\pi r \dfrac{64}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{128}{r} + \pi r^2$.

    d) Ahora derivando: $A' = -\dfrac{128}{r^2} + 2\pi r = \dfrac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$.

    e) De donde el valor crítico es $r = 4/\sqrt[3]{\pi}$. Por lo tanto $h = \dfrac{64}{\pi r^2} = 4/\sqrt[3]{\pi}$.

f) Para el caso de la lata cerrada $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

3. Una página rectangular ha de contener 24 pul. cuadradas de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de $1{,}5$ pulgadas y los margenes de la izquierda y derecha son de 1 pulgada. Cuales deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel.

   a) El área que se va a minimizar es $A = (x+3)(y+2)$ (objetivo), donde el área impresa es $24 = xy$ (restricción).

   b) Despejando $y = \dfrac{24}{x}$. Entonces $A = (x+3)(\dfrac{24}{x}+2) = \dfrac{72}{x} + 2x + 30$.

   c) Derivando e igualando a cero; $-\dfrac{72}{x^2} + 2 = 0$, entonces $x^2 = 36$, es decir $x = \pm 6$.

   d) El mínimo lo alcanza cuando $x = 6$.

4. Supongamos que la resistencia de una viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la profundidad. Cuales deben ser las dimensiones de la viga de mayor resistencia que puede cortarse de un tronco de diámetro d.

   a) Si x es la anchura y y es la profundidad , entonces la viga tendrá resistencia máxima cuando la función xy^2 (objetivo) sea máxima.

   b) Como d es el diametro del tronco $y^2 = d^2 - x^2$ (restricción).

   c) Entonces $R(x) = x(d^2 - x^2)$, derivando $R' = d^2 - 3x^2$, de donde el punto crítico es $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

5. Cual es el ancho de un rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una parábola $y^2 = 4px$ y la recta $x = a$.

   a) El área del rectangulo es $A = 2y(a-x)$ donde x puede despejarse de la parábola $y^2 = 4px$, $x = \dfrac{y^2}{4p}$, entonces $A = 2ay - \dfrac{y^3}{2p}$.

   b) Derivando respecto a y, $A' = 2a - \dfrac{3y^2}{2p}$, e igualando a cero: $y = \sqrt{4ap/3}$.

6. Hallar la altura de un cilindro circular recto de volumen V máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

   a) Sea r el radio de la base y $2h$ la altura del cilindro. Por geometría $V = 2\pi r^2 h$ y $r^2 + h^2 = R^2$, donde R es el radio de la esfera.

   b) $\dfrac{dV}{dr} = 2\pi(r^2\dfrac{dh}{dr} + 2rh)$ y $2r + 2h\dfrac{dh}{dr} = 0$, de esta última relación $\dfrac{dh}{dr} = -\dfrac{r}{h}$.

   c) Por lo tanto $\dfrac{dV}{dr} = 2\pi(-\dfrac{r^3}{h} + 2rh) = 0$, entonces $r^2 = 2h^2$.

d) Como $R^2 = r^2 + h^2 = 2h^2 + h^2$, entonces $h = R/\sqrt{3}$, y $2h = 2R/\sqrt{3}$ alcanza el volumen máximo.