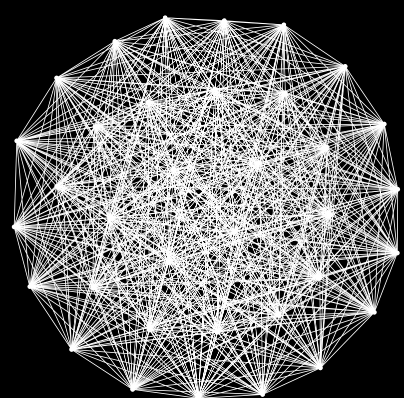
MathCon

The Mathematics Firm

Problemas de matemáticas discretas

Primera lista de problemas de matemáticas discretas



José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Aritmética Modular

1. Hacer la tabla de suma y producto de $\mathbb{Z}_{11}$.
2. Por ensaño y error calcular $\ln_2(9)$ en $\mathbb{Z}_{11}$.
3. Si $g = 2$ y $\mathbb{Z}_{11}$, son los parámetros públicos en el esquema de intercambio de claves DH (Diffie-Hellman). La parte secreta de Alice es 6, la parte secreta de Bob es 3. Encontrar la clave secreta compartida.
4. Si $g = 2$ y $\mathbb{Z}_{11}$, son los parámetros públicos en el esquema de intercambio de claves DH (Diffie-Hellman). La parte secreta de Alice es 8, la parte secreta de Bob es 9. Encontrar la clave secreta compartida.
5. Si $g = 2$ y $\mathbb{Z}_{11}$, son los parámetros públicos en el esquema de intercambio de claves DH (Diffie-Hellman). La clave compartida es 3. Encontrar posibles claves secretas de Alice y Bob.
6. En el sistema RSA, tomamos $p = 23$, $q = 17$ $e = 3$, cifrar el mensaje $m = 10$, y descifrarlo escribiendo todas sus operaciones modulares.
7. En el sistema RSA, tomamos $p = 23$, $q = 17$ $e = 3$, cifrar el mensaje $m = 25$, y descifrarlo escribiendo todas sus operaciones modulares.
8. En el sistema RSA, tomamos $p = 19$, $q = 17$ $e = 5$, cifrar el mensaje $m = 66$, y descifrarlo escribiendo todas sus operaciones modulares.

2

Conteos

1. ¿cuántas maneras hay de construir palabras de 5 letras? (26^5).
2. ¿cuántas maneras hay de construir palabras de 5 letras diferentes? ($26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$).
3. ¿cuántas maneras hay de elegir un hombre y una mujer de 3 hombres y 8 mujeres? $\binom{3}{1}\binom{8}{1}$.
4. ¿cuántas maneras hay sentar 2 personas en 5 sillas de una fila? ($5 \cdot 4$).
5. ¿cuántas maneras hay de elegir 2 sillas de 5 sillas de una fila? (10).
6. Pamela tiene 15 libros distintos, ¿de cuántas formas puede colocar sus libros en dos repisas de modo que haya al menos un libro en cada una?. $14 \cdot 15!$.
7. ¿cuántas maneras hay de arreglar 4 diferentes libros de álgebra, 3 diferentes libros de geometría, y 6 diferentes libros de cálculo?
8. ¿cuántas maneras hay de sentar 12 caballeros del rey Arturo en una mesa redonda? (11!).
9. De las 26 letras del alfabeto, ¿cuántas permutaciones no tienen 2 vocales juntas? ($21!\binom{22}{5}5!$).
10. Mostrar que:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
11. Mostrar que:
$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$
12. Mostrar que:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
13. Mostrar que:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
14. Mostrar que:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

15. ¿Cuál es el valor de la variable `counter` del siguiente algoritmo?

```
counter = 0;
For i=1 to 12 do
counter = counter +1;
For j=5 to 10 do
counter = counter +2;
For k=15 downto 8 do
counter = counter +3;
```

    ¿Qué principio de conteo esta involucrado?

16. ¿Cuantas veces se ejecuta la instrucción `Write`?

```
For i = 1 to 12 do
For j = 5 to 10 do
For k = 15 downto 8 do
Write ((i-j)*k)
```

    ¿Qué principio de conteo esta involucrado?

3
Recurrencia

1. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas.

   a) $a_{n+1} - 1{,}5a_n = 0$, $n \geq 0$.

   b) $4a_n - 5a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$.

   c) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_1 = 5$.

   d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$.

2. Si a_n, $n \geq 0$, es una solución de la relación de recurrencia $a_{n+1} - da_n = 0$, y $a_3 = 153/49$, $a_5 = 1377/2401$, ¿cuánto vale d?

3. Encontrar la complejidad del algoritmo de la Burbuja.

4. Encontrar la complejidad del algoritmo de las torres de Hanoi.

5. Resolver la recurrencia de los números de Fibonacci.

6. $a_{n+2} + a_n = 0$, $a_0 = 0, a_1 = 3$.

7. $a_{n+2} + 4a_n = 0$, $a_0 = 1, a_1 = 1$.

8. $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, $a_0 = 1, a_1 = 3$.

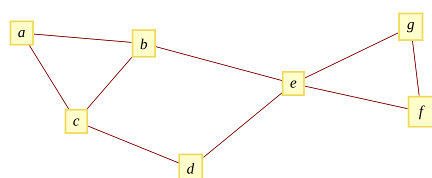
9. $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$, $a_0 = 0, a_1 = 1$.

10. $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7$, $a_0 = 0, a_1 = 2$.

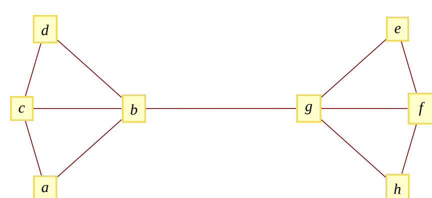
11. $a_{n+2} - a_n = \sin(n\pi/2)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

4
Gráficas

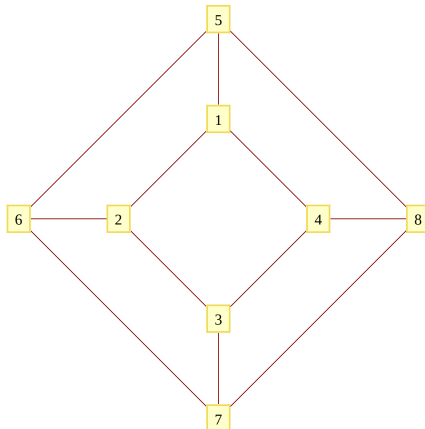
1. Para la siguiente gráfica, determinar si es posible, un camino de b a d que no sea recorrido, un recorrido $b - d$ que no sea camino simple, un camino simple $b - d$, un camino cerrado $b - b$ que no sea un circuito, un circuito $b - b$ que no sea un ciclo, y un ciclo de $b - b$.



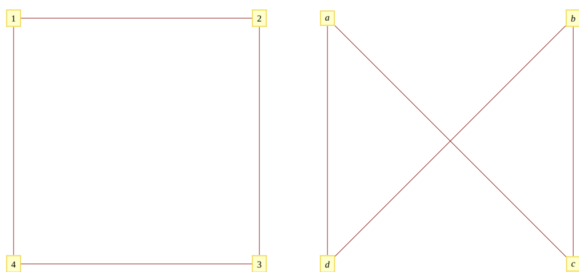
2. Para la siguiente gráfica, determinar si es posible, un camino de b a h que no sea recorrido, un recorrido $b - h$ que no sea camino simple, un camino simple $a - f$, un camino cerrado $a - a$ que no sea un circuito, un circuito $b - b$ que no sea un ciclo, y un ciclo de $b - b$. Determinar, cuántos caminos simples existen entre $a - h$, cuántos de ellos son de longitud 5.



3. Para la siguiente gráfica determinar, sí es posible, un camino de 5 a 7 que no sea recorrido, un recorrido $2 - 8$ que no sea camino simple, un camino simple $5 - 3$, un camino cerrado $1 - 1$ que no sea un circuito, un circuito $5 - 5$ que no sea un ciclo, y un ciclo de $2 - 2$. Determinar, cuántos caminos simples existen entre $5 - 7$.



4. Mostrar que las siguientes gráficas son isomorfas (trivial).



5. Mostrar qué gráficas son isomorfas (Fig 1 y Fig 2 no son isomorfas, Fig 3 si lo es a Fig 1).

Fig 1):

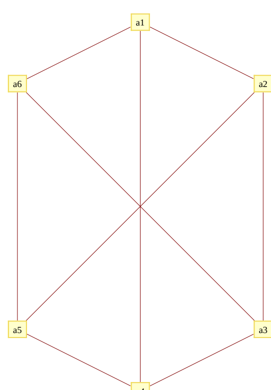


Fig 2):

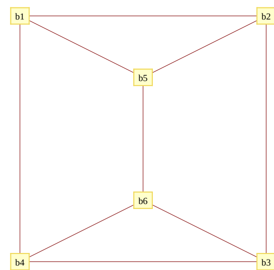


Fig 3):