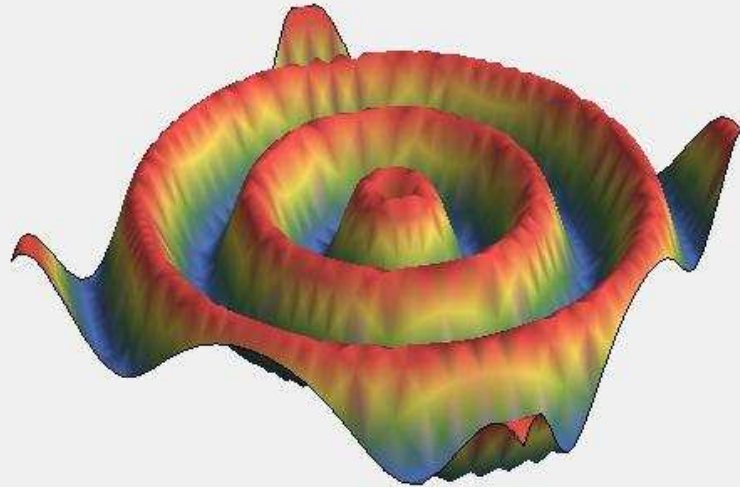


MathCon

The Mathematics Firm

Cálculo Vectorial borrador



Contenido

1. El espacio \mathbb{R}^n	2
2. Topología de \mathbb{R}^n	6
3. Funciones Vectoriales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	10
3.1. Curvas en el plano y espacio	10
3.2. Derivada de funciones vectoriales	10
3.3. Curvatura y longitud de arco	12
3.4. Geometría diferencial	12
4. Funciones de Varias Variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	15
4.1. Gráfica de funciones	15
4.2. Derivada parciales	16
5. Máximos y Mínimos	20
5.1. Máximos y Mínimos locales	20
5.2. Máximos y Mínimos absolutos	20

1

El espacio \mathbb{R}^n

1.1 \mathbb{R}^n como espacio vectorial

El espacio \mathbb{R}^n se define como n -adas de números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Los ejemplos más comúnmente usados son \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Los elementos de \mathbb{R}^n se llaman vectores.

Operaciones en \mathbb{R}^n

La suma: se hace entrada por entrada, por ejemplo en \mathbb{R}^3

$$(1, 2, 3) + (2, 3, 4) = (3, 5, 7)$$

La suma de vectores satisface las siguientes propiedades:

1. La suma es conmutativa $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{x}}$.
2. La suma es asociativa $\bar{\mathbf{x}} + (\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{z}}) = (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) + \bar{\mathbf{z}}$.
3. Existe el vector cero, tal que $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{x}}$.
4. Para todo vector $\bar{\mathbf{x}}$ existe su inverso aditivo $-\bar{\mathbf{x}}$, tal que $\bar{\mathbf{x}} + (-\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}$.

Es decir, los vectores en \mathbb{R}^n con la suma forman un **grupo abeliano**.

Producto por un escalar: un escalar es un número real (también puede ser un complejo o racional, en general un elemento de un campo). El producto escalar está definido por

$$r(x_1, x_2, x_3) = (rx_1, rx_2, rx_3)$$

El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

1. Distributividad de un escalar sobre la suma de vectores: $r(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = r\bar{\mathbf{x}} + r\bar{\mathbf{y}}$.
2. Distributividad de un vector sobre la suma de escalares: $(r + s)\bar{\mathbf{x}} = r\bar{\mathbf{x}} + s\bar{\mathbf{x}}$.
3. Asociatividad de escalares: $(rs)\bar{\mathbf{x}} = r(s\bar{\mathbf{x}})$.
4. $1\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}$.

Es decir, los vectores en \mathbb{R}^n con la suma y el producto escalar forman un **espacio vectorial**.

1.2 Propiedades básicas de un espacio vectorial

Un vector v es combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_m si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tales que si $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$.

Un conjunto de vectores v_1, v_2, \dots, v_m son linealmente independientes (*l.i.*), si para cualquier combinación lineal del cero $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$, siempre se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Si los vectores no son *l.i.* son linealmente dependientes (*l.d.*)

En $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ dos vectores son *l.i.* si no son múltiplos uno del otro. Es decir, si dos vectores son múltiplos entonces son *l.d.*

En \mathbb{R}^n un conjunto de n vectores *l.i.* se llama base.

En \mathbb{R}^2 cualquier conjunto de vectores no colineales diferentes de cero son una base.

Una de \mathbb{R}^n base genera a \mathbb{R}^n , es decir, todo vector de \mathbb{R}^n se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base.

La base canónica de \mathbb{R}^3 es $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$

Producto escalar (punto): el producto punto esta definido para dos vectores en \mathbb{R}^n , por ejemplo para \mathbb{R}^3 :

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.
4. $(c \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), c \in \mathbb{R}$.

Dos vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$$

La **norma** de un vector \mathbf{x} se define como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

Una **métrica** en el espacio vectorial \mathbb{R}^n esta definida mediante una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades, llamada **distancia**:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

La **proyección** del vector x sobre el vector y es el vector

$$P_x = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}$$

Producto cruz en \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta$$

2

Topología de \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n es un espacio topológico, a partir de que es un espacio métrico con los conjuntos abiertos convencionales.

\mathbb{R}^n es un espacio métrico con la métrica definida como antes:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ un número real positivo, una bola abierta $B_r(x_0)$ con centro en x y radio r es:

$$B_r(x) = \{x \mid d(x - x_0) < r\}.$$

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado conjunto abierto, si para cualquier punto $x \in A$ existe una bola abierta $B_r(x) \subseteq A$.

1. Cualquier unión de conjuntos abiertos es abierta.
2. Cualquier intersección finita de abiertos es abierta.

Un conjunto A se llama cerrado, si su complemento A^c es abierto.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x \in A$ es un punto interior de A si existe una bola abierta $B_x(r) \subseteq A$. Definimos el interior de A como $Int(A) = \{x | x \text{ es punto interior}\}$.

1. $Int(A)$ es un conjunto abierto, de hecho es el conjunto abierto más grande contenido en A .
2. A es abierto, si y sólo si $A = Int(A)$.

1. El vacío y \mathbb{R}^n son abiertos y cerrados.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ un número real positivo, una bola cerrada $B_r(x_0)$ con centro en x y radio r es:

$$B_r(x) = \{x | d(x - x_0) \leq r\}.$$

Una bola cerrada, es un conjunto cerrado.

1. Toda intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
2. Toda unión finita de cerrados, es cerrado.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y A un conjunto, decimos que x es punto límite o de acumulación de A , si para toda bola $B_x(r)$ entonces $B_x(r) \cap A \neq \emptyset$.

La cerradura de un conjunto A es definida como $\bar{A} = A \cup D(A)$, donde $D(A)$ es el conjunto de sus puntos límites.

1. \bar{A} es un conjunto cerrado.
2. A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$.
3. \bar{A} es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A .

Un punto x de A es llamado punto frontera si para toda vecindad (abierto (bola) que contiene a x) de x , esta interseca a A y a su complemento A^c .

1. $\partial A = A \cap A^c$
2. ∂A es cerrado.
3. A es cerrado si contiene a su frontera.

1. Demuestre que cualquier conjunto de vectores de \mathbb{R}^n que contenga al vector cero es linealmente dependiente.
2. Pruebe que el conjunto formado por un solo vector no nulo es linealmente independiente.
3. Si el ángulo de dos vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} es 30° y $\|\mathbf{a}\| = 6$, $\|\mathbf{b}\| = 5$, calcular $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$.
4. encuentre si existen vectores tales que
 - a) $\|a\| = 3$, $\|b\| = 1$, $\|a + b\| = 5$.
 - b) $\|a\| = 3$, $\|b\| = 4$, $\|a + b\| = 5$.
5. Escribir la recta $y = -4x + 2$, en la forma $\{(x, y) | (x, y) = (0, b) + t(1, m), t \in \mathbb{R}\}$.
6. Escribir la recta $y = 5x + 2$ en forma vectorial.
7. Dada la recta $\{(x, y) | (x, y) = (0, 3) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}\}$ encontrar su ecuación de manera $y = mx + b$.
8. Encontrar el vector proyección de $x = (2, 5)$ sobre $y = (3, 4)$.
9. Sea la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada vector \mathbf{x} de \mathbb{R}^3 le asocia su norma $\|\mathbf{x}\|$. Es $\|\cdot\|$, inyectiva, sobre?
10. Muestre que $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
11. Usando la proyección de vectores calcular la distancia de un punto a una recta.

-
-
12. Demuestre que el conjunto $S = \{(x, y) | x > 0 \& y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.
13. Sea A un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 demuestre que si quitamos un número finito de puntos a A , $A - \{x_1, \dots, x_m\}$ es abierto.
14. Sean x_0, y_0 dos puntos diferentes de \mathbb{R}^2 , muestre que existen dos conjuntos abiertos U, V tal que $x_0 \in U, y_0 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
15. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$, es $A, B, A \cap B$ abierto, cerrado, ninguno?
16. Muestre que el conjunto formado por un solo punto no es abierto.
17. Diga en cada caso si el conjunto es abierto o cerrado, o ni abierto ni cerrado.
- a) $A = \{(x, y) | xy > 0\}$
 - b) $A = \{(x, y) | x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$
 - c) $A = \{(x, y) | |x| + |y| < 1\}$
 - d) $A = \{(x, y) | x = y\}$
 - e) $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$
 - f) $A = \{(x, y) | y < x^2\}$
 - g) $A = \{(x, y) | \sin x < 0\}$
 - h) $A = \{(x, y) | (y - x^2 + 2)(y + x^2 - 4) < 0\}$

3

Funciones Vectoriales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

3.1. Curvas en el plano y espacio

1. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(\sin(t), 3, \cos(t))$.
R. Es un círculo con centro en $(0, 3, 0)$.
2. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(\sin(t), \sin(t), \sqrt{2} \cos(t))$. R. Las ecuaciones $x = \sin x, y = \sin x, z = \sqrt{2} \cos(t)$, satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, por tanto la curva está en la esfera, además $x = y$, es decir es la intersección de la esfera y el plano $x = y$, o sea un círculo sobre el plano $x = y$.
3. Encuentre la ecuación vectorial de la línea que une los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(6, -1, 2)$.
4. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(e^{-t} \cos(10t), e^{-t} \sin(10t), e^{-t})$.
R. Mostrar que $x^2 + y^2 = z^2$, por lo tanto la curva se dibuja sobre este cono.
5. Mostrar que la curva con ecuaciones paramétricas, $(t \cos(t), t \sin(t), t)$, está sobre el cono $x^2 + y^2 = z^2$, por lo tanto la curva se dibuja sobre este cono (observar que z puede ser positivo y negativo).
6. Mostrar que la curva con ecuaciones paramétricas, $(\sin(t), \cos(t), \sin^2(t))$, es la curva que define la intersección de las superficies $z = x^2, x^2 + y^2 = 1$.

3.2. Derivada de funciones vectoriales

1. Encontrar el vector tangente unitario \mathbf{T} , en el punto $t = \pi/4$, sobre la curva $(2 \sin(t), 2 \cos t, \tan t)$.
R. $f'(t) = (2 \cos(t), -2 \sin(t), \sec^2(t))$, $f'(\pi/4) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, y $|f'(t)| = 2\sqrt{2}$. Entonces $\mathbf{T} = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$.
2. Encontrar la ecuación paramétrica de la línea tangente de la curva $\bar{r}(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t), e^{-t})$, en el punto $(1, 0, 1)$.
R. $\bar{r}'(t) = (-e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)), e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)), -e^{-t})$, si $t = 0$ tenemos el

punto $(1, 0, 1)$, por lo tanto el vector tangente es $\overline{r}'(0) = (-1, 1, -1)$. Por lo tanto la línea tangente es: $(1 - t, t, 1 - t)$.

- 3 Demostrar $\frac{d}{dt}(\bar{r}(t) \times \bar{r}'(t)) = \bar{r}(t) \times \bar{r}''(t)$.
R. Trivial.
- 4 Si $\bar{r}(t) \neq 0$, mostrar que $\frac{d}{dt}|\bar{r}(t)| = \frac{1}{|\bar{r}(t)|}\bar{r}(t) \cdot \bar{r}'(t)$.
R. $|\bar{r}(t)| = (\bar{r}(t) \cdot \bar{r}(t))^{1/2}$.
- 5 Mostrar que: si $\bar{u}(t) = \bar{r}(t) \cdot [\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)]$, entonces $\bar{u}'(t) = \bar{r}(t) \cdot [\bar{r}'(t) \times \bar{r}'''(t)]$.
Tarea.

3.3. Curvatura y longitud de arco

1. Encontrar la longitud de la curva: $\bar{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ para $0 \leq t \leq 1$.
R. $\bar{r}'(t) = (\sqrt{2}, e^t, e^{-t})$, $|\bar{r}'(t)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (e^t)^2 + (e^{-t})^2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$, entonces $L = \int_0^1 |\bar{r}'(t)| dt = \int_0^1 e^t + e^{-t} dt = e - e^{-1}$.
2. Parametrizar la curva por longitud de arco:
- a) $(\cos t, \sin t, t)$ desde $t = 0$ en dirección creciente de t .
R. $\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'(t)| = \sqrt{2}$, $s = s(t) = \int_0^t |\bar{r}'(u)| du = \sqrt{2}t$. Entonces $t = s/\sqrt{2}$, así $r(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), (s/\sqrt{2}))$.
- b) $(2t, (1-3t), (5+4t))$ del punto $t = 0$ en dirección creciente de t .
R. $\bar{r}'(t) = (2, -3, 4)$, $|\bar{r}'(t)| = \sqrt{29}$. $s = \int_0^t |\bar{r}'(u)| du = \sqrt{29}t$, $t = s/\sqrt{29}$.
 $r(s) = (2s/\sqrt{29}, (1 - 3s/\sqrt{29}), (5 + 4s/\sqrt{29}))$.
- c) $(e^{2t} \cos(2t), 2, e^{2t} \sin(2t))$ del punto $t = 0$ en dirección creciente de t .
R. $\bar{r}'(t) = (2e^{2t}(\cos(2t) - \sin(2t)), 0, 2e^{2t}(\cos(2t) + \sin(2t)), -3, 4)$, $|\bar{r}'(t)| = 2\sqrt{2}e^{2t}$. $s = \int_0^t |\bar{r}'(u)| du = \int_0^t 2\sqrt{2}e^{2u} du = \sqrt{2}(e^{2t} - 1)$.

3.4. Geometría diferencial

1. Encontrar $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ de la curva $\bar{r}(t) = (2 \sin(t), 5t, 2 \cos(t))$.
R. $\bar{r}'(t) = (2 \cos(t), 5, -2 \sin(t))$, $|\bar{r}'(t)| = \sqrt{4 \cos^2 t + 25 + 4 \sin^2 t} = \sqrt{29}$.
 $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{29}}\bar{r}'(t)$. $\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2 \sin t, 0, -2 \cos t)$. $|\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{29}}$. $\mathbf{N}(t) = \frac{1/\sqrt{29}}{2/\sqrt{29}}(-2 \sin t, 0, -2 \cos t) = (-\sin t, 0, -\cos t)$. $\kappa = \frac{2}{29}$.
2. $(t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t)$, $t > 0$.
R. Tarea.

3. Encontrar la curvatura de la curva $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$, en el punto $(1, 0, 0)$.

$$\text{R. } \kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{4}{25}.$$

4. Encontrar la curvatura de $y = \cos x$, con la fórmula $\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$.

5. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene curvatura 4 en el origen.

6. Use la fórmula $\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$, para encontrar la curvatura de:

a) $(e^t \cos t, e^t \sin t)$.

b) $(1 + t^3, t + t^2)$.

7. Encontrar \mathbf{T} , \mathbf{B} , \mathbf{N} de la curva $(e^t, e^t \sin t, e^t \cos t)$ en el punto $(1, 0, 1)$.

$$\text{R. Para } t = 0, e^t(1, \sin t, \cos t), \bar{r}'(t) = e^t(1, \sin t + \cos t, \cos t - \sin t), \mathbf{T}(t) = \frac{\bar{r}'(t)}{|\bar{r}'(t)|} = \frac{(1, \sin t + \cos t, \cos t - \sin t)}{\sqrt{3}}. \mathbf{T}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, \cos t - \sin t, -\sin t - \cos t). \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos t - \sin t, -\sin t - \cos t). \mathbf{N}(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

8. Encontrar la ecuación del plano normal y osculador de la curva $(2 \sin 3t, t, 2 \cos 3t)$ en el punto $(0, \pi, -2)$.

$$\text{R. } t = \pi, \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{37}}(6 \cos 3t, 1, -6 \sin 3t), T(\pi) = \frac{1}{\sqrt{37}}(-6, 1, 0) \text{ es un vector normal al plano normal, igualmente } (-6, 1, 0), -6(x - 0) + 1(y - \pi) + 0(z + 2) = y - 6x = \pi. \mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{37}}(-18 \sin 3t, 0, -18 \cos 3t), |T'(t)| = \frac{18}{\sqrt{37}}. \mathbf{N}(t) = (-\sin 3t, 0, -\cos 3t). \mathbf{N}(\pi) = (0, 0, 1), B(\pi) = \frac{1}{\sqrt{37}}(1, 6, 0). \text{ Como } \mathbf{B} \text{ es normal al plano osculador, entonces éste es } x + 6y = 6\pi.$$

9. Mostrar que la curvatura κ cumple: $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$.

$$\text{R. } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \frac{dt}{ds}}, \text{ ya que: } \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/ds}{ds/dt} \right| = \frac{|d\mathbf{T}/dt|}{ds/dt}, \text{ y } \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \text{ Entonces: } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}.$$

10. Mostrar:

a) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{B}$.

$$b) \frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{T}.$$

$$c) \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}, \text{ donde } \tau \text{ es llamada la torsión de la curva.}$$

d) Para curvas planas $\tau = 0$.

$$R. a) |\mathbf{B}| = 1, \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1, \frac{d}{ds}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 0, 2\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} = 0, \frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{B}.$$

$$b) \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \frac{1}{ds/dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \frac{1}{|r'(t)|} = [(\mathbf{T}' \times \mathbf{N}) + (\mathbf{T} \times \mathbf{N}')] \frac{1}{|r'(t)|} = [(\mathbf{T}' \times \frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}) + (\mathbf{T} \times \mathbf{N}')] \frac{1}{|r'(t)|} = \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{N}'}{|r'(t)|}.$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{T}.$$

c) $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{T}$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{N}$. \mathbf{B} , \mathbf{T} , \mathbf{N} es una base ortonormal, $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a \mathbf{B} y \mathbf{T} (de a)). Por lo tanto es paralelo a \mathbf{N} , es decir $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$ donde $\tau(s)$ es un escalar.

d) Para una curva plana \mathbf{T} , \mathbf{N} pertenecen en el plano de la curva, por lo que $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$, como \mathbf{B} es un vector constante perpendicular al plano, $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$, entonces $\tau(s) = 0$.

11. Fórmulas de Frenet-Serret.

$$a) \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}.$$

$$b) \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

$$c) \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

R. a) problema 9. c) problema 10 c).

$$b) \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \mathbf{B}\kappa\mathbf{N} = -\tau(\mathbf{N} \times \mathbf{T}) + \kappa(\mathbf{B} \times \mathbf{N}). \text{ Pero } \mathbf{B} \times \mathbf{N} = \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{T} = -\mathbf{T}.$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) - \kappa\mathbf{T} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

4

Funciones de Varias Variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



4.1. Gráfica de funciones

1. Encontrar el dominio de la función $\ln(x + y - 1)$.
R. $y > 1 - x$.
2. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{1 + x - y^2}$.
R. $x \geq y^2 - 1$.
3. Encontrar el dominio de la función $e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$.
R. $z \geq x^2 + y^2$.
4. Encontrar el dominio de la función $\ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
R. $x^2 + y^2 + z^2 < 25$.
5. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x + y}$.
R. $y \geq -x$.
6. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.
R. $y \geq 0, x \geq 0$.
7. Encontrar el dominio de la función $\ln(9 - x^2 - 9y^2)$.
R. $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$.
8. Encontrar el dominio de la función $\frac{x - 3y}{x + 3y}$.
R. $x + 3y \neq 0$.
9. Encontrar el dominio de la función $\frac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$.
R. $x^2 + y^2 - 4 \neq 0$.
10. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{y - x} \ln(y + x)$.
R. $y \geq x, y > -x$.

11. Encontrar el dominio de la función $\frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.

R. $y \geq x^2, x \neq \pm 1$.

12. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$.

R. $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 < 4$.

4.2. Derivada parciales

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, respecto de todas las variables.

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^4$.

b) $f(x, y) = xe^{3y-2x}$.

c) $f(x, y) = y \ln(xy)$.

d) $f(x, y) = \frac{x-2}{y+2}$.

e) $f(x, y) = x^y$.

f) $f(x, y) = \sin xy \cos(y+x)$.

g) $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$.

h) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$.

i) $f(s, t) = \arctan(s^2\sqrt{t})$.

j) $f(x, y) = xe^{y/x}$.

k) $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2) dt$.

l) $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$.

m) $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$.

n) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ñ) $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

o) $f(x, y, z, t) = xyz^2 \tan(xyzt)$.

p) $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$.

q) $u = \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n)$.

r) $f(x, y, z, w, t) = x^{y^z w^t}$.

s) $f(x, y, z, w, t) = x^y y^z z^w w^t$.

2. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

a) $z = f(x) + f(y)$.

b) $z = f(x + y)$.

$$c) z = f(x)f(y).$$

$$d) z = f(xy).$$

$$e) z = f(x/y).$$

3. Verificar si el teorema de Clairaut es cierto para las siguientes funciones. $u_{xy} = u_{yx}$.

$$a) u = x \sin(x + 2y).$$

$$b) u = x^4 y^2 - 2xy^5.$$

$$c) u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$d) u = xy e^y.$$

4. Verificar que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin kx$ es solución de la ecuación de calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

5. Determinar cuales de las siguientes funciones es solución de la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$a) u = x^2 + y^2.$$

$$b) u = x^2 - y^2.$$

$$c) u = x^3 + 3xy^2.$$

$$d) u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$e) u = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y.$$

$$f) e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x.$$

6. Mostrar, si la función $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, es solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

7. Mostrar que las siguientes funciones son solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

$$a) u = \sin(kx) \sin akt.$$

$$b) u = t/(a^2 t^2 - x^2).$$

$$c) u = (x - at)^6 + (x + at)^6.$$

$$d) u = \sin(x - at) + \ln(x + at).$$

8. Mostrar que la función $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ es solución de la ecuación de onda.

9. Si $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

10. Mostrar que la función $z = xe^y + ye^x$ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

11. Mostrar que la función $P = bL^\alpha K^\beta$, satisface la ecuación:

$$L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

Encontrar la diferencial de la función:

a) $w = y \cos(xy)$.

$$\text{R. } dw = -y^2 \sin(xy) dx + (-xy \sin(xy) + \cos(xy)) dy.$$

b) El largo y ancho de un rectángulo se miden de 30 cm y 24 cm respectivamente, con un error en la medición en ambos de 0.1 cm cada uno. Use la diferencial para estimar el máximo error en el cálculo del área del rectángulo.

$$\text{R. } dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = y dx + x dy = 24(0,1) + 30(0,1) = 5,4 \text{ cm}^2.$$

c) Las dimensiones de una caja rectangular miden 80 cm 60 cm y 50 cm respectivamente, con un posible error de 0.2cm en cada medida. Use la diferencial para estimar el máximo error en calcular el área de la superficie. $S(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$

$$\text{R. } dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = 2(y + z) dx + 2(x + z) dy + 2(x + y) dz = 220(0,2) + 260(0,2) + 280(0,2) = 152 \text{ cm}^2.$$

d) Estime la cantidad de lata en una lata cerrada con diametro de 8 cm y altura de 12 cm, si la lata tiene un grosor de 0.05 cm.

R.

a) Encontrar la derivada direccional de f en el punto dado y la dirección indicada por el ángulo θ .

$$1) f(x, y) = x^2 y^3 - y^4 \quad (2, 1) \quad \theta = \pi/4.$$

$$2) f(x, y) = \sqrt{5x - 4y} \quad (4, 1) \quad \theta = -\pi/6.$$

$$3) f(x, y) = x \sin xy \quad (2, 0) \quad \theta = \pi/3.$$

b) Encontrar la razón de cambio f en el punto P en la dirección del vector \mathbf{u} .

$$1) f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y \quad P = (1, 2) \quad \mathbf{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

$$2) f(x, y) = y \ln x \quad P = (1, -3) \quad \mathbf{u} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

$$3) f(x, y, z) = xe^{2yz} \quad P = (3, 0, 2) \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$4) f(x, y, z) = \sqrt{x + yz} \quad P = (1, 3, 1) \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

c) Encontrar la derivada direccional de la función f en el punto P en la dirección del vector \mathbf{v} .

$$1) f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}, \quad P = (3, 4), \quad \mathbf{v} = (4, -3).$$

$$2) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad P = (2, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, 2).$$

$$3) f(x, y) = x^2 e^y, \quad P = (2, 0), \quad \mathbf{v} = \hat{i} + \hat{j}.$$

$$4) f(x, y) = \sin y e^{-x}, \quad P = (0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j}.$$

$$5) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P = (1, 2, -2), \quad \mathbf{v} = (-6, 6, -3).$$

$$6) f(x, y, z) = x/(y + z), \quad P = (4, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 3).$$

$$7) f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}, \quad P = (4, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 3).$$

d) Encontrar la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en donde ocurre.

$$1) f(x, y) = y^2/x, \quad P = (2, 4).$$

$$2) f(x, y) = ye^{-x} + xe^{-y}, \quad P = (0, 0).$$

$$3) f(x, y) = \sin(xy), \quad P = (1, 0).$$

$$4) f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4, \quad P = (1, 1, 1).$$

$$5) f(x, y, z) = \ln(xy^2 z^3), \quad P = (1, -2, -3).$$

$$6) f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z), \quad P = (-5, 1, 1).$$

5

Máximos y Mínimos

5.1. Máximos y Mínimos locales

Una función de dos variables tiene un máximo local en (a, b) , si $f(x, y) \leq f(a, b) \forall (x, y) \in V_{(a,b)}$. El valor $f(a, b)$ es el valor máximo local. De manera similar se define un mínimo local.

Si f tienen un mínimo o máximo local en (a, b) y las parciales de primer orden de f existen, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Un punto (a, b) es llamado crítico de f si $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$, o si alguna de las derivadas no existe.

Criterio de la segunda derivada; Si las segundas derivadas parciales de f son continuas en una vecindad de (a, b) y $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$. Sea $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$, entonces:

- Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
- Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.
- Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es ni mínimo ni máximo local, llamado punto silla.

5.2. Máximos y Mínimos absolutos

Si f es continua en un conjunto compacto (cerrado y acotado) D , entonces f alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en algunos puntos de D .