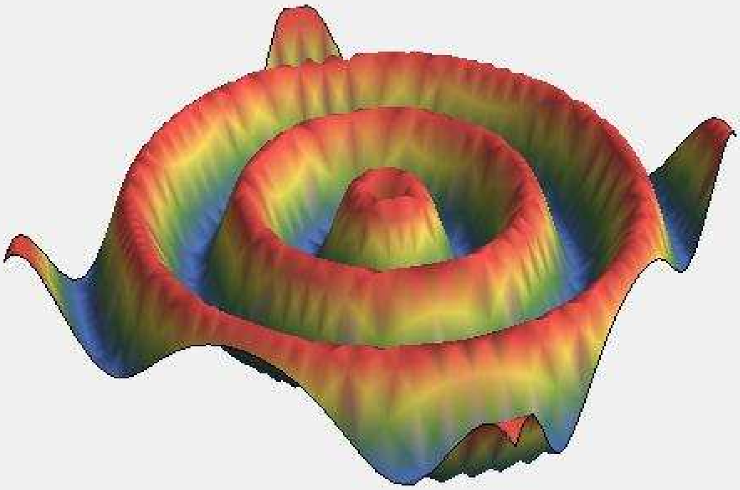
MathCon

The Mathematics Firm

# Cálculo Vectorial borrador



# Contenido

# 1

# El espacio $\mathbb{R}^n$

## 1.1 $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial

El espacio $\mathbb{R}^n$ se define como $n$-adas de números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

Los ejemplos más comúnmente usados son $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman vectores.

### Operaciones en $\mathbb{R}^n$

**La suma:** se hace entrada por entrada, por ejemplo en $\mathbb{R}^3$

$$(1, 2, 3) + (2, 3, 4) = (3, 5, 7)$$

La suma de vectores satisface las siguientes propiedades:

1. La suma es conmutativa $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}}$.
2. La suma es asociativa $\overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{z}}$.
3. Existe el vector cero, tal que $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{x}}$.
4. Para todo vector $\overline{\mathbf{x}}$ existe su inverso aditivo $\overline{\mathbf{-x}}$, tal que $\overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{-x}}) = \overline{\mathbf{0}}$.

Es decir, los vectores en $\mathbb{R}^n$ con la suma forman un **grupo abeliano**.

**Producto por un escalar:** un escalar es un número real (también puede ser un complejo o racional, en general un elemento de un campo). El producto escalar esta definido por

$$r(x_1, x_2, x_3) = (rx_1, rx_2, rx_3)$$

El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

1. Distributividad de un escalar sobre la suma de vectores: $r(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = r\bar{\mathbf{x}} + r\bar{\mathbf{y}}$.
2. Distributividad de un vector sobre la suma de escalares: $(r + s)\bar{\mathbf{x}} = r\bar{\mathbf{x}} + s\bar{\mathbf{x}}$.
3. Asociatividad de escalares: $(rs)\bar{\mathbf{x}} = r(s\bar{\mathbf{x}})$.
4. $1\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}$.

Es decir, los vectores en $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto escalar forman un **espacio vectorial**.

## 1.2 Propiedades básicas de un espacio vectorial

Un vector $v$ es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, .., v_m$ si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m$ tales que si $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$.

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, .., v_m$ son linealmente independientes ($l.i.$), si para cualquier combinación lineal del cero $\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$, siempre se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Si los vectores no son $l.i.$ son linealmente dependientes ($l.d.$)

En $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ dos vectores son $l.i.$ si no son múltiplos uno del otro. Es decir, si dos vectores son múltiplos entonces son $l.d.$

En $\mathbb{R}^n$ un conjunto de $n$ vectores $l.i.$ se llama base.

En $\mathbb{R}^2$ cualquier conjunto de vectores no colineales diferentes de cero son una base.

Una de $\mathbb{R}^n$ base genera a $\mathbb{R}^n$, es decir, todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base.

La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$

**Producto escalar (punto ):** el producto punto esta definido para dos vectores en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo para $\mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.
4. $(c\,\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $c \in \mathbb{R}$.

Dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz** :

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$$

La **norma** de un vector $\mathbf{x}$ se define como $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$, entonces $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz** :

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||x||||y|| \cos\theta$$

Una **métrica** en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ esta definida mediante una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades, llamada **distancia**:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

La **proyección** del vector $x$ sobre el vector $y$ es el vector

$$P_x = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2}\mathbf{y}$$

**Producto cruz** en $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$||\mathbf{x} \times \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}|| |\sin\theta|$$

# 2

# Topología de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico, a partir de que es un espacio métrico con los conjuntos abiertos convencionales.

$\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con la métrica definida como antes:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ un número real positivo, una bola abierta $B_r(x_0)$ con centro en $x$ y radio $r$ es:

$$B_r(x) = \{x | d(x - x_0) < r\}.$$

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado conjunto abierto, si para cualquier punto $x \in A$ existe una bola abierta $B_r(x) \subseteq A$.

1. Cualquier unión de conjuntos abiertos es abierta.
2. Cualquier intersección finita de abiertos es abierta.

Un conjunto $A$ se llama cerrado, si su complemento $A^c$ es abierto.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x \in A$ es un punto interior de $A$ si existe una bola abierta $B_x(r) \subseteq A$. Definimos el interior de $A$ como $Int(A) = \{x|x \text{ es punto interior}\}$.

1. $Int(A)$ es un conjunto abierto, de hecho es el conjunto abierto más grande contenido en $A$.
2. $A$ es abierto, si y sólo si $A = Int(A)$.

1. El vacío y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ un número real positivo, una bola cerrada $B_r(x_0)$ con centro en $x$ y radio $r$ es:

$$B_r(x) = \{x|d(x - x_0) \leq r\}.$$

Una bola cerrada, es un conjunto cerrado.

1. Toda intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
2. Toda unión finita de cerrados, es cerrado.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $A$ un conjunto, decimos que $x$ es punto límite o de acumulación de $A$, si para toda bola $B_x(r)$ entonces $B_x(r) \cap A \neq \emptyset$.

La cerradura de un conjunto $A$ es definida como $\overline{A} = A \cup D(A)$, donde $D(A)$ es el conjunto de sus puntos límites.

1. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.
2. $A$ es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.
3. $\overline{A}$ es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $A$.

Un punto $x$ de $A$ es llamado punto frontera si para toda vecindad (abierto (bola) que contiene a $x$) de $x$, esta interseca a $A$ y a su complemento $A^c$.

1. $\partial A = A \cap A^c$
2. $\partial A$ es cerrado.
3. $A$ es cerrado si contiene a su frontera.

1. Demuestre que cualquier conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenga al vector cero es linealmente dependiente.
2. Pruebe que el conjunto formado por un solo vector no nulo es linealmente independiente.
3. Si el ángulo de dos vectores **a**, **b** es $30°$ y $||\mathbf{a}|| = 6$, $||\mathbf{b}|| = 5$, calcular $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$.
4. encuentre si existen vectores tales que
   *a*) $||a|| = 3, ||b|| = 1, ||a + b|| = 5$.
   *b*) $||a|| = 3, ||b|| = 4, ||a + b|| = 5$.
5. Escribir la recta $y = -4x+2$, en la forma $\{(x, y)|(x, y) = (0, b)+t(1, m), t \in \mathbb{R}\}$.
6. Escribir la recta $y = 5x + 2$ en forma vectorial.
7. Dada la recta $\{(x, y)|(x, y) = (0, 3) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}\}$ encontrar su ecuación de manera $y = mx + b$.
8. Encontrar el vector proyección de $x = (2, 5)$ sobre $y = (3, 4)$.
9. Sea la función $|| \cdot || : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que a cada vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ le asocia su norma $||\mathbf{x}||$. Es $|| \cdot ||$, inyectiva, sobre?
10. Muestre que $|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\,| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$
11. Usando la proyección de vectores calcular la distancia de un punto a una recta.

12. Demuestre que el conjunto $S = \{(x,y)|x > 0 \& y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.

13. Sea $A$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ demuestre que si quitamos un número finito de puntos a $A$, $A - \{x_1, .., x_m\}$ es abierto.

14. Sean $x_0, y_0$ dos puntos diferentes de $\mathbb{R}^2$, muestre que existen don conjuntos abiertos $U, V$ tal que $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

15. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y-1)^2 < 1\}$, es $A, B, A \cap B$ abierto, cerrado, ninguno?

16. Muestre que el conjunto formado por un solo punto no es abierto.

17. Diga en cada caso si el conjunto es abierto o cerrado, o ni abierto ni cerrado.

    *a*) $A = \{(x,y)|xy > 0\}$
    *b*) $A = \{(x,y)|x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$
    *c*) $A = \{(x,y)||x| + |y| < 1\}$
    *d*) $A = \{(x,y)|x = y\}$
    *e*) $A = \{(x,y)|x^2 + y^2 => 1\}$
    *f*) $A = \{(x,y)|y < x^2\}$
    *g*) $A = \{(x,y)|\sin x < 0\}$
    *h*) $A = \{(x,y)|(y - x^2 + 2)(y + x^2 - 4) < 0\}$

# 3

# Funciones Vectoriales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

## 3.1. Curvas en el plano y espacio

1. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(\sin(t), 3, \cos(t))$.
   R. Es un círculo con centro en $(0, 3, 0)$.
2. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(\sin(t), \sin(t), \sqrt{2}\cos(t))$. R. Las ecuaciones $x = \sin x, y = \sin x, z = \sqrt{2}\cos(t)$, satisfacen la ecuación $x^2+y^2+z^2 = 2$, por tanto la curva está en la esfera, además $x = y$, es decir es la intersección de la esfera y el plano $x = y$, o sea un círculo sobre el plano $x = y$.
3. Encuentre la ecuación vectorial de la línea que une los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(6, -1, 2)$.
4. Bosquejar la gráfica de la función vectorial $(e^{-t}\cos(10t), e^{-t}\sin(10t), e^{-t})$.
   R. Mostrar que $x^2 + y^2 = z^2$, por lo tanto la curva se dibuja sobre este cono.
5. Mostrar que la curva con ecuaciones paramétricas, $(t\cos(t), t\sin(t), t)$, está sobre el cono $x^2 + y^2 = z^2$, por lo tanto la curva se dibuja sobre este cono (observar que $z$ puede ser positivo y negativo).
6. Mostrar que la curva con ecuaciones paramétricas, $(\sin(t), \cos(t), \sin^2(t))$, es la curva que define la intersección de las superficies $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$.

## 3.2. Derivada de funciones vectoriales

1. Encontrar el vector tangente unitario **T**, en el punto $t = \pi/4$, sobre la curva $(2\sin(t), 2\cos t, \tan t)$.
   R. $f'(t) = (2\cos(t), -2\sin(t), \sec^2(t))$, $f'(\pi/4) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, y $|f'(t)| = 2\sqrt{2}$. Entonces $\mathbf{T} = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$.
2. Encontrar la ecuación paramétrica de la línea tangente de la curva
   $\overline{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t})$, en el punto $(1, 0, 1)$.
   R. $\overline{r'}(t) = (-e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)), e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)), -e^{-t})$, si $t = 0$ tenemos el

punto $(1, 0, 1)$, por lo tanto el vector tangente es $\overline{r'}(0) = (-1, 1, -1)$. Por lo tanto la línea tangente es: $(1 - t, t, 1 - t)$.

3 Demostrar $\dfrac{d}{dt}(\overline{r}(t)\times\overline{r}'(t))=\overline{r}(t)\times\overline{r}''(t)$.
R. Trivial.

4 Si $\overline{r}(t)\neq 0$, mostrar que $\dfrac{d}{dt}|\overline{r}(t)|=\dfrac{1}{|\overline{r}(t)|}\overline{r}(t)\cdot\overline{r}'(t)$.
R. $|\overline{r}(t)|=(\overline{r}(t)\cdot\overline{r}(t))^{1/2}$.

5 Mostrar que: si $\overline{u}(t)=\overline{r}(t)\cdot[\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)]$, entonces $\overline{u}'(t)=\overline{r}(t)\cdot[\overline{r}'(t)\times\overline{r}'''(t)]$.
Tarea.

## 3.3. Curvatura y longitud de arco

1. Encontrar la longitud de la curva: $\overline{r}(t)=(\sqrt{2}t,e^t,e^{-t})$ para $0\leq t\leq 1$.
   R. $\overline{r}'(t)=(\sqrt{2},e^t,e^{-t})$, $|r'(t)|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(e^t)^2+(e^{-t})^2}=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}=e^t+e^{-t}$, entonces $L=\int_0^1|r'(t)|dt=\int_0^1 e^t+e^{-t}dt=e-e^{-1}$.
2. Parametrizar la curva por longitud de arco:
   *a*) $(\cos t,\sin t,t)$ desde $t=0$ en dirección creciente de $t$.
   R. $\dfrac{ds}{dt}=|\overline{r}'(t)|=\sqrt{2}$, $s=s(t)=\int_0^t|\overline{r}'(u)|du=\sqrt{2}t$. Entonces $t=s/\sqrt{2}$, así $r(s)=(\cos(s/\sqrt{2}),\sin(s/\sqrt{2}),(s/\sqrt{2}))$.
   *b*) (2t, (1-3t), (5+4t)) del punto $t=0$ en dirección creciente de $t$.
   R. $\overline{r}'(t)=(2,-3,4)$, $|\overline{r}'(t)|=\sqrt{29}$. $s=\int_0^t|\overline{r}'(u)|du=\sqrt{29}t$, $t=s/\sqrt{29}$. $r(s)=(2s/\sqrt{29},(1-3s/\sqrt{29}),(5+4s/\sqrt{29}))$.
   *c*) $(e^{2t}\cos(2t),2,e^{2t}\sin(2t))$ del punto $t=0$ en dirección creciente de $t$.
   R. $\overline{r}'(t)=(2e^{2t}(\cos(2t)-\sin(2t),0,2e^{2t}(\cos(2t)+\sin(2t)),-3,4)$, $|\overline{r}'(t)|=2\sqrt{2}e^{2t}$. $s=\int_0^t|\overline{r}'(u)|du=\int_0^t 2\sqrt{2}e^{2u}du=\sqrt{2}(e^{2t}-1)$.

## 3.4. Geometría diferencial

1. Encontrar $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(T)$ de la curva $\overline{r}(t)=(2\sin(t),5t,2\cos(t))$.
   R. $\overline{r}'(t)=(2\cos(t),5,-2\sin(t))$, $|\overline{r}'(t)|=\sqrt{4\cos^2t+25+4\sin^2t}=\sqrt{29}$. $\mathbf{T}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{29}}\overline{r}'(t)$. $\mathbf{T}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{29}}(-2\sin t,0,-2\cos t)$. $|\mathbf{T}'(t)|=\dfrac{2}{\sqrt{29}}$. $\mathbf{N}(t)=\dfrac{1/\sqrt{29}}{2/\sqrt{29}}(-2\sin t,0,-2\cos t)=(-\sin t,0,-\cos t)$. $\kappa=\dfrac{2}{29}$.
2. $(t^2,\sin t-t\cos t,\cos t+t\sin t)$, $t>0$.
   R. Tarea.

3. Encontrar la curvatura de la curva $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t)$, en el punto $(1, 0, 0)$.
   R. $\kappa(t) = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \dfrac{4}{25}$.

4. Encontrar la curvatura de $y = \cos x$, con la fórmula $\kappa = \dfrac{|f''(x)|}{[1 + (f(x))^2]^{3/2}}$.

5. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene curvatura 4 en el origen.

6. Use la fórmula $\kappa = \dfrac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$, para encontrar la curvatura de:

   *a*) $(e^t \cos t, e^t \sin t)$.
   *b*) $(1 + t^3, t + t^2)$.

7. Encontrar $\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}$ de la curva $(e^t, e^t \sin t, e^t \cos t)$ en el punto $(1, 0, 1)$.
   R. Para $t = 0$, $e^t(1, \sin t, \cos t)$, $\overline{r}'(t) = e^t(1, \sin t + \cos t, \cos t - \sin t)$, $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|} = \dfrac{(1, \sin t + \cos t, \cos t - \sin t)}{\sqrt{3}}$. $\mathbf{T}(0) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. $\mathbf{T}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, \cos t - \sin t, -\sin t - \cos t)$. $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos t - \sin t, -\sin t - \cos t)$. $\mathbf{N}(0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. $\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

8. Encontrar la ecuación del plano normal y osculador de la curva $(2 \sin 3t, t, 2 \cos 3t)$ en el punto $(0, \pi, -2)$.
   R. $t = \pi$, $\mathbf{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{37}}(6 \cos 3t, 1, -6 \sin 3t)$, $T(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{37}}(-6, 1, 0)$ es un vector normal al plano normal, igualmente $(-6, 1, 0)$, $-6(x - 0) + 1(y - \pi) + 0(z + 2) = y - 6x = \pi$. $\mathbf{T}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{37}}(-18 \sin 3t, 0, -18 \cos 3t)$, $|T'(t)| = \dfrac{18}{\sqrt{37}}$. $\mathbf{N}(t) = (-\sin 3t, 0, -\cos 3t)$. $\mathbf{N}(\pi) = (0, 0, 1)$ , $B(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{37}}(1, 6, 0)$. Como $\mathbf{B}$ es normal al plano osculador, entonces éste es $x + 6y = 6\pi$.

9. Mostrar que la curvatura $\kappa$ cumple: $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$.
   R. $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \dfrac{|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{|\frac{d\mathbf{T}}{dt}|\frac{ds}{dt}}$, ya que: $\kappa = |\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}| = |\dfrac{d\mathbf{T}/ds}{ds/dt}| = \dfrac{|d\mathbf{T}/dt|}{ds/dt}$, y $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$. Entonces: $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$.

10. Mostrar:

    *a*) $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} \perp \mathbf{B}$.

*b*) $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\perp\mathbf{T}$.

*c*) $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$, donde $\tau$ es llamada la torsión de la curva.

*d*) Para curvas planas $\tau = 0$.

R. a) $|\mathbf{B}| = 1$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = 1$, $\dfrac{d}{ds}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = 0$, $2\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{B} = 0$, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\perp\mathbf{B}$.
b) $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{T}\times\mathbf{N})\dfrac{1}{ds/dt} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{T}\times\mathbf{N})\dfrac{1}{|r'(t)|} = [(\mathbf{T}'\times\mathbf{N}) + (\mathbf{T}\times \mathbf{N}')]\dfrac{1}{|r'(t)|} = [(\mathbf{T}'\times\dfrac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}) + (\mathbf{T}\times\mathbf{N}')]\dfrac{1}{|r'(t)|} = \dfrac{\mathbf{T}\times\mathbf{N}'}{|r'(t)|}$.
$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\perp\mathbf{T}$.
c) $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$, $\mathbf{T}\perp\mathbf{N}$, $\mathbf{B}\perp\mathbf{T}$, $\mathbf{B}\perp\mathbf{N}$. $\mathbf{B}, \mathbf{T}, \mathbf{N}$ es una base ortonormal, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$ (de a)). Por lo tanto es paralelo a $\mathbf{N}$, es decir $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$ donde $\tau(s)$ es un escalar.
d) Para una curva plana $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ pertenecen en el plano de la curva, por lo que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$, como $\mathbf{B}$ es un vector constante perpendicular al plano, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}$, entonces $\tau(s) = 0$.

11. Fórmulas de Frenet-Serret.

*a*) $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$.

*b*) $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

*c*) $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$.

R. a) problema 9. c) problema 10 c).
b) $\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T}$, $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = \dfrac{d}{ds}(\mathbf{B}\times\mathbf{T}) = \dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\times\mathbf{T} + \mathbf{B}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = -\tau\mathbf{N}\times\mathbf{T} + \mathbf{B}\kappa\mathbf{N} = -\tau(\mathbf{N}\times\mathbf{T}) + \kappa(\mathbf{B}\times\mathbf{N})$. Pero $\mathbf{B}\times\mathbf{N} = \mathbf{B}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{T}) = (\mathbf{B}\cdot\ \mathbf{T})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\mathbf{T} = -\mathbf{T}$.
$\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau(\mathbf{T}\times\mathbf{N}) - \kappa\mathbf{T} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

# 4

# Funciones de Varias Variables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

## 4.1. Gráfica de funciones

1. Encontrar el dominio de la función $\ln(x+y-1)$.
   R. $y > 1-x$.
2. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{1+x-y^2}$.
   R. $x \geq y^2 - 1$.
3. Encontrar el dominio de la función $e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.
   R. $z \geq x^2 + y^2$.
4. Encontrar el dominio de la función $\ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
   R. $x^2 + y^2 + z^2 < 25$.
5. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x+y}$.
   R. $y \geq x$.
6. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.
   R. $y \geq 0$ $x \geq 0$.
7. Encontrar el dominio de la función $\ln(9 - x^2 - 9y^2)$.
   R. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 < 1$.
8. Encontrar el dominio de la función $\dfrac{x-3y}{x+3y}$.
   R. $x + 3y \neq 0$.
9. Encontrar el dominio de la función $\dfrac{3x+5x}{x^2+y^2-4}$.
   R. $x^2 + y^2 - 4 \neq 0$.
10. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{y-x}\ln(y+x)$.
    R. $y \geq x$, $y > -x$.

11. Encontrar el dominio de la función $\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.
    R. $y \geq x^2$, $x \neq \pm 1$.
12. Encontrar el dominio de la función $\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.
    R. $x^2+y^2 \geq 1$, $x^2+y^2 < 4$.

## 4.2. Derivada parciales

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, respecto de todas las variables.
   - *a*) $f(x,y) = 3x^2 - 2y^4$.
   - *b*) $f(x,y) = xe^{3y-2x}$.
   - *c*) $f(x,y) = y\ln(xy)$.
   - *d*) $f(x,y) = \frac{x-2}{y+2}$.
   - *e*) $f(x,y) = x^y$.
   - *f*) $f(x,y) = \sin xy \cos(y+x)$.
   - *g*) $f(s,t) = st^2/(s^2+t^2)$.
   - *h*) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$.
   - *i*) $f(s,t) = \arctan(s^2\sqrt{t})$.
   - *j*) $f(x,y) = xe^{y/x}$.
   - *k*) $f(x,y) = \displaystyle\int_y^x \cos(t^2)\,dt$.
   - *l*) $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$.
   - *m*) $f(x,y,z) = x^2e^{yz}$.
   - *n*) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   - *ñ*) $f(x,y,z) = x^{y^z}$.
   - *o*) $f(x,y,z,t) = xyz^2\tan(xyzt)$.
   - *p*) $u = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}$.
   - *q*) $u = \sin(x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n)$.
   - *r*) $f(x,y,z,w,t) = x^{y^{z^{w^t}}}$.
   - *s*) $f(x,y,z,w,t) = x^yy^zz^ww^t$.
2. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
   - *a*) $z = f(x) + f(y)$.
   - *b*) $z = f(x+y)$.

c) $z = f(x)f(y)$.
d) $z = f(xy)$.
e) $z = f(x/y)$.

3. Verificar si el teorema de clairaut es cierto para las siguientes funciones. $u_{xy} = u_{yx}$.

a) $u = x\sin(x + 2y)$.
b) $u = x^4y^2 - 2xy^5$.
c) $u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$.
d) $u = xye^y$.

4. Verificar que la funci?n $u = e^{-\alpha^2k^2t}\sin kx$ es soluci?n de la ecuación de calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

5. Determinar cuales de las siguientes funciones es solución de la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

a) $u = x^2 + y^2$.
b) $u = x^2 - y^2$.
c) $u = x^3 + 3xy^2$.
d) $u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$.
e) $u = \sin x\cosh y + \cos x\sinh y$.
f) $e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

6. Mostrar, si la función $u = \frac{1}{\sqrt{x2+y2+z2}}$, es solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

7. Mostrar que las siguientes funciones son soluci?n de la ecuación de onda $u_{tt} = a2u_{xx}$.

a) $u = \sin(kx)\sin akt$.
b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$.
c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$.
d) $u = \sin(x - at) + \ln(x + at)$.

8. Mostrar que la función $u(x,t) = f(x + at) + g(x - at)$ es solución de la ecuación de onda.

9. Si $u = e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostrar que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

10. Mostrar que la función $z = xe^y + ye^x$ es solución de la ecuación
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

11. Mostrar que la función $P = bL^\alpha K^\beta$, satisface la ecuación:
$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha+\beta)P$$

Encontrar la diferencial de la función:

*a*) $w = y\cos(xy)$.
R. $dw = -y^2\sin(xy)dx + (-xy\sin(xy) + \cos(xy))dy.$

*b*) El largo y ancho de un rectángulo se miden de 30 cm y 24 cm respectivamente, con un error en la medición en ambos de 0.1 cm cada uno. Use la diferencial para estimar el máximo error el en cálculo del área del rectángulo.
R. $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = ydx + xdy = 24(0{,}1) + 30(0{,}1) = 5{,}4cm^2$.

*c*) Las dimensiones de una caja rectangular miden 80 cm 60 cm y 50 cm respectivamente, con un posible error de 0.2cm en cada medida. Use la diferencial para estimar el máximo error en calcular el área de la superficie. $S(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$
R. $dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y+z)dx + 2(x+z)dy + 2(x+y) = 220(0{,}2) + 260(0{,}2) + 280(0{,}2) = 152cm^2$.

*d*) Estime la cantidad de lata en una lata cerrada con diametro de 8 cm y altura de 12 cm, si la lata tiene un grosor de 0.05 cm.
R.

*a*) Encontrar la derivada direccional de $f$ en el punto dado y la dirección indicada por el ángulo $\theta$.
1) $f(x,y) = x^2y^3 - y^4$ $(2,1)$ $\theta = \pi/4$.
2) $f(x,y) = \sqrt{5x-4y}$ $(4,1)$ $\theta = -\pi/6$.
3) $f(x,y) = x\sin xy$ $(2,0)$ $\theta = \pi/3$.

*b*) Encontrar la razón de cambio $f$ en el punto $P$ en la dirección del vector **u**.
1) $f(x,y) = 5xy^2 - 4x^3y$ $P = (1,2)$ $\mathbf{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.
2) $f(x,y) = y\ln x$ $P = (1,-3)$ $\mathbf{u} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.
3) $f(x,y,z) = xe^{2yz}$ $P = (3,0,2)$ $\mathbf{u} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

4) $f(x,y,z)=\sqrt{x+yz}$ $P=(1,3,1)$ **u** $=(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7})$.

*c*) Encontrar la derivada direccional de la función $f$ en el punto $P$ en la dirección del vector **v**.

1) $f(x,y)=1+2x\sqrt{y}$, $P=(3,4)$, **v** $=(4,-3)$.
2) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $P=(2,1)$, **v** $=(-1,2)$.
3) $f(x,y)=x^2e^y$, $P=(2,0)$, **v** $=\hat{i}+\hat{j}$.
4) $f(x,y)=\sin ye^{-x}$, $P=(0,\pi/3)$,**v** $=3\hat{i}-2\hat{j}$.
5) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P=(1,2,-2)$, **v** $=(-6,6,-3)$.
6) $f(x,y,z)=x/(y+z)$, $P=(4,1,1)$, **v** $=(1,2,3)$.
7) $f(x,y,z)=(x+2y+3z)^{3/2}$, $P=(4,1,1)$, **v** $=(1,2,3)$.

*d*) Encontrar la máxima razón de cambio de $f$ en el punto dado y la dirección en donde ocurre.

1) $f(x,y)=y^2/x$, $P=(2,4)$.
2) $f(x,y)=ye^{-x}+xe^{-y}$, $P=(0,0)$.
3) $f(x,y)=\sin(xy)$, $P=(1,0)$.
4) $f(x,y,z)=x^2y^3x^4$, $P=(1,1,1)$.
5) $f(x,y,z)=\ln(xy^2z^3)$, $P=(1,-2,-3)$.
6) $f(x,y,z)=\tan(x+2y+3z)$, $P=(-5,1,1)$.

# 5

# Máximos y Mínimos

## 5.1. Máximos y Mínimos locales

Una función de dos variables tiene un máximo local en $(a, b)$, si $f(x, y) \leq f(a, b)$ $\forall(x, y) \in V_{(a,b)}$. El valor $f(a, b)$ es el valor máximo local. De manera similar se define un mínimo local.

Si $f$ tienen un mínimo o máximo local en $(a, b)$ y las parciales de primer orden de $f$ existen, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Un punto $(a, b)$ es llamado critico de $f$ si $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$, o si alguna de las derivadas no existe.

Criterio de la segunda derivada; Si las segundas derivadas parciales de $f$ son continuas en una vecindad de $(a, b)$ y $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$. Sea $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$, entonces:

*a*) Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

*b*) Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

*c*) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es ni mínimo ni máximo local, llamado punto silla.

## 5.2. Máximos y Mínimos absolutos

Si $f$ es continua en un conjunto compacto (cerrado y acotado) $D$, entonces $f$ alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en algunos puntos de $D$.