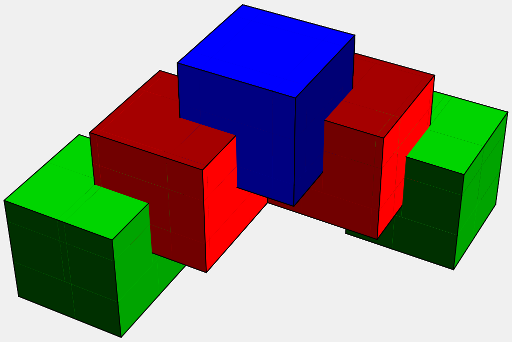
MathCon
The Mathematics Firm

Integración



Contenido

1

Integrales Dobles

1.1. Integrales iteradas

Sugerencia: Evalué estas integrales de manera directa.

1. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1} (3x+2y)\,dy\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y} (4x-y)\,dx\,dy.$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-y-1}^{y-1} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$
5. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{x^3}^{x} e^{y/x}\,dy\,dx.$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{\pi/2} (x\cos y - y\cos x)\,dy\,dx.$
7. $\displaystyle\int_{1}^{e}\int_{0}^{x} (\ln x)\,dy\,dx.$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} \left(\frac{1}{1+y^2}\right)dx\,dy.$
9. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{\tan x}^{\sec x} (y+\operatorname{sen} x)\,dy\,dx.$
10. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{0}^{\operatorname{sen} x} e^{y}\cos x\,dy\,dx.$

1.2. Regiones en $\mathbb{R}^2$

Cambie el orden de integración y evalúe la integral resultante.

1. $\displaystyle\int_0^9 \int_{2x}^2 e^{y^2}\, dy\, dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen} x^3\, dx\, dy.$
3. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2\, dx\, dy.$
4. $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} y\, dy\, dx.$
5. $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\, dx\, dy.$

Sugerencia: Dibuje la región de integración.

1.3. Volumen

Dibujar el sólido en el primer cuadrante acotado por las ecuaciones siguientes, y calcule su volumen.

1. $x^2 + z^2 = 9$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
3. $2x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
4. $y^2 = z$, $y = x$, $x = 4$, $z = 0$.
5. $z = x^2 + y^2$, $2x + 3y = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Sugerencia: Use una integral doble.

1.4. Volumenes bajo una función

Cambie el orden de integración y evalúe la integral resultante.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{x-1}^{1-x^2}(x^2+y^2)\,dy\,dx.$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{3-x}^{3-x^2}\sqrt{25-x^2-y^2}\,dy\,dx.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{y/4}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx\,dy.$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}}(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$
5. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-1}^{2}3\,dy\,dx.$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\operatorname{sen} x}dy\,dx.$

Sugerencia: Dibuje la región de integración y la gráfica.

1.5. Centro de Masa

Encontrar el centro de masa de la lámina con la forma de la región acotada por las gráficas dadas y que tiene la densidad indicada.

1. $y=\sqrt{x}$, $x=9$, $y=0$, $\rho(x,y)=x+y$.
2. $y=e^{-x^2}$ $y=0$, $x=-1$, $x=1$, $\rho(x,y)=|xy|$.
3. $y=\operatorname{sen} x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$, $\rho(x,y)=y$.
4. $x=y^2$, $y-x=2$, $y=-2$, $y=3$, $\rho(x,y)=1$.
5. $xy^2=1$, $y=1$, $y=2$, $\rho(x,y)=x^2+y^2$.

Sugerencia: Aplicar la fórmula.

1.6. Coordenadas Polares

Cambie el orden de integración y evalúe la integral resultante.

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx.$

2. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx.$

3. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{x} \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

Sugerencia: Dibuje la región de integración y la gráfica.

4. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx.$

5. Calcular el volumen del sólido que esta fuera del cilindro $x^2+y^2=9$ y dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=25$.

6. Calcular el volumen del sólido que se encuentra dentro del elipsoide $4x^2+4y^2+z^2=16$, y fuera del cilindro $x^2+y^2=1$.

7. Calcular del volumen del sólido acotado por el cono $z=r$, y por el cilindro $r=2\cos\theta$.

8. Calcular el volumen del sólido acotado por el paraboloide $z=4r^2$, el cilindro $r=3\operatorname{sen}\theta$ y el plano $z=0$.

1.7. Ejercicios varios

1. Evaluar la siguiente integral cambiando a coordenadas polares: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dy\,dx.$

2. Halle el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$ y arriba de la región delimitada por la recta $y=2x$ y la parábola $y=x^2$.

3. Hallar el volumen del cuerpo en limitado por las superficies indicadas:

   a) $z=x^2+y^2$, $z=1$.

   b) $x+y+z=6$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

   c) $2x^2+3y^2+z^2=6$, $z=(2x^2+3y^2)^{1/2}$, $z\geq 0$.

4. Demuestre que el volumen de la esfera de radio r es $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

5. Demuestre que el volumen del cono de altura h y radio r es $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

6. Demuestra usando la integral de arco que la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$.

2

Integrales Triples

2.1. Evaluar las siguientes integrales

Sugerencia: Dibuje la región de integración.

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx.$

2. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{x^2} \int_{x+z}^{x-z} z\, dy\, dx\, dz.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y\, dz\, dy\, dx.$

4. $\displaystyle\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x+y+z)\, dx\, dz\, dy.$

2.2. Regiones y cambio del orden de integración

Dibuje las siguientes regiones Q acotadas por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\displaystyle\int\int\int_Q f(x,y,z)dV$, como una integral iterada de 6 maneras diferentes.

1. $x+2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
2. $z=9-4x^2-y^2$, $z=0$.
3. $36x^2+9y^2+4z^2=36$.
4. $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=2$.

2.3. Volumen con triple integral

Dibujar la región acotada por las siguientes gráficas y calcular su volumen con triple integral.

1. $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $x^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$.
3. $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$, $x = 0$.
4. $z = 4y^2$, $z = 2$, $x = 2$, $x = 0$.
5. $y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 2$,$x = 0$.
6. $z = x^2 + y^2$, $y + z = 2$.
7. $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$.
8. $z = e^{x+y}$, $y = 3x$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$.
9. $z = x^2$, $z = x^3$, $y = z^2$, $y = 0$.
10. $y = x^2 + z^2$, $z = x^2$, $z = 4$, $y = 0$.

Sugerencia: Usar un programa para gráficas las regiones.

2.4. Coordenadas cilíndricas

1. Encontrar el volumen y el centro de gravedad del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
2. Encontrar el volumen y el centro de gravedad del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.
3. Un sólido homogéneo está acotado por las gráficas de $z = r$, $z = r^2$. Encontrar:
   a) el centro de masa.
   b) el momento de inercia respecto al eje z.
4. Encuentre la masa del sólido en forma de cono acotado por las gráficas de $z = r$ y $z = 4$, suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P al eje z.

Sugerencia: Usar coordenadas cilíndricas.

2.5. Coordenadas esféricas

1. Calcular el volumen del sólido que está encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

2. Calcular el volumen del sólido que esta dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

3. Calcule la masa del sólido que esta dentro de la esfera $r = 2$, suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de las esferas.

Sugerencia: Usar coordenadas esféricas.

MathCon

The Mathematics Firm

Integración