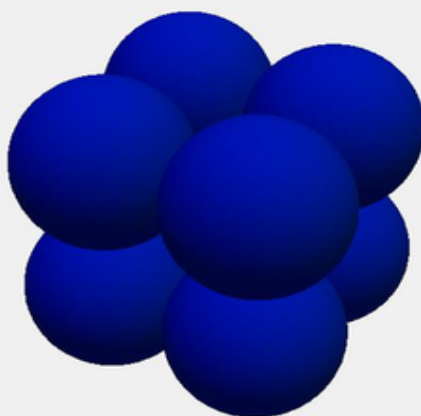


# MathCon

*The Mathematics Firm*

## Lógica

Definiciones básicas de cálculo proposicional



[www.math.com.mx](http://www.math.com.mx)

José de Jesús Angel Angel  
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2012

# Contenido

<b>1. Lógica</b>	<b>2</b>
1.1. Definiciones . . . . .	2
1.1.1. Negación NOT . . . . .	2
1.1.2. Disyunción OR . . . . .	3
1.1.3. Conjunción AND . . . . .	3
1.1.4. Condicional IF . . . . .	3
1.1.5. Equivalencia (bicondicional, IF AND ONLY IF) . . . . .	3
1.1.6. Disyunción XOR . . . . .	3
1.1.7. Tautología y contradicción . . . . .	4
1.1.8. Más de la condicional . . . . .	4
1.1.9. Cuantificadores . . . . .	5
1.1.10. Argumentos válidos . . . . .	5
1.1.11. Ejercicios . . . . .	5
<b>2. Conjuntos</b>	<b>7</b>
2.1. Definiciones . . . . .	7
<b>3. Estructuras algebraicas</b>	<b>10</b>
3.1. Grupos . . . . .	10

# Capítulo 1

## Lógica

### 1.1. Definiciones

**Definición 1** Una *proposición* es una expresión lingüística que solo podemos decir que sea falsa o verdadera, pero no ambas a la vez (principio del tercero excluido).

Decir si las siguientes expresiones son o no proposiciones.

1. El reloj marca las doce del día.
2. Los autobuses llegan en la tarde.
3. !!Dónde esta mi perro!!
4. Dos más tres es igual a cinco.
5. Todo niño del mundo tiene un carrito.
6. Al menos un día del año llueve.

**Definición 2** En matemáticas la mayoría de expresiones son proposiciones.

#### 1.1.1. Negación NOT

**Definición 3** La *negación* de una proposición es aquella que cambia el valor verdadero a falso y el falso a verdadero, es un operador unario, es decir, se aplica solo a una proposición. Escrita también como  $\neg P$ ,  $\bar{P}$ .

P	$\neg P$
V	F
F	V

### 1.1.2. Disyunción OR

**Definición 4** La *disyunción* (inclusiva, operador binario) de dos proposiciones es falsa si ambos disyuntos son falsos, en otro caso es verdadera. Escrita también como  $\vee$ .

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### 1.1.3. Conjunción AND

**Definición 5** La *conjunción* (operador binario) de dos proposiciones es verdadera si ambos conjuntos son verdaderos, en otro caso es falsa. Escrita también como  $\wedge$  ó  $y$ .

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

### 1.1.4. Condicional IF

**Definición 6** La *condicional* (operador binario) se aplica a dos proposiciones, donde a la primera se le llama antecedente y la segunda consecuente. El condicional es falso en el caso de que el antecedente sea falso y el consecuente verdadero. En cualquier otro caso el condicional es verdadero. Escrita también como  $P \supset Q$ .

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

### 1.1.5. Equivalencia (bicondicional, IF AND ONLY IF)

**Definición 7** La *equivalencia* (operador binario) se aplica a dos proposiciones, es verdadero si ambas tienen el mismo valor de verdad, es falso si tienen diferentes valores de verdad. Escrita también como: para que  $P$  es necesario y suficiente que  $Q$ , o  $\equiv$ .

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

### 1.1.6. Disyunción XOR

**Definición 8** La *disyunción* (exclusiva, operador binario) de dos proposiciones es verdadera si ambos disyuntos tienen diferente valor, en otro caso es falsa. Escrita también como  $EOR$ ,  $EXOR$ .

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

### 1.1.7. Tautología y contradicción

**Definición 9** 1. Una proposición que es siempre verdadera se llama **tautología**.

2. Una proposición que es siempre falsa se llama **contradicción**.
3. Una proposición que es falsa unas veces y otras verdadera se llama **contingencia**.

Las siguientes proposiciones son tautologías:

1. La ley de la contradicción  $\neg(P \& \neg P)$ .
2. La ley del tercero excluido  $P \vee \neg P$ .
3. La ley de la doble negación  $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$ .
4. (leyes de Morgan)

$$\neg(P \& Q) \text{ es equivalente a } \neg P \vee \neg Q.$$

La negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones.

$$\neg(P \vee Q) \text{ es equivalente a } \neg P \& \neg Q.$$

La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones.

5.  $P \Rightarrow Q$  es equivalente a  $\neg P \vee Q$ .
6.  $P \Rightarrow Q$  es equivalente a  $\neg(P \& \neg Q)$ .
7. Ley distributiva de la conjunción respecto la disyunción  $P \vee (Q \& R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \& (P \vee R)$ .
8. Ley distributiva de la disyunción respecto la conjunción  $P \& (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \& Q) \vee (P \& R)$ .
9. La ley de la contraposición (transposición)  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ .
10. Ley transitiva  $((P \Rightarrow R) \& (R \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ .
11. Ley de MPP (Modus Ponendo Ponens) o MP (Modus Ponens) o Detachment,
 
$$(P \& (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$
12. Ley de MTP (Modus Tollendo Ponens)
 
$$((P \vee Q) \& \neg P) \Rightarrow Q$$
13. Ley de la simplificación  $(P \& Q) \Rightarrow P$ .
14. Ley de la adición  $P \Rightarrow (P \vee Q)$ .

### 1.1.8. Más de la condicional

**Definición 10** La implicación  $P \Rightarrow Q$  tiene asociada:

1. su recíproca,  $Q \Rightarrow P$ .
2. la contrapositiva  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ .
3. la inversa  $\neg P \Rightarrow \neg Q$ .

**Proposición 1** La implicación  $P \Rightarrow Q$  es equivalente a su contrapositiva  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ .

**Definición 11** Decimos que  $P$  es condición necesaria para que  $Q$  si se cumple el condicional  $Q \Rightarrow P$ ,  $Q$  solo si  $P$ .

**Definición 12** Decimos que  $P$  es condición suficiente para que  $Q$  si se cumple el condicional  $P \Rightarrow Q$ ,  $P$  solo si  $Q$ .

### 1.1.9. Cuantificadores

**Definición 13** *Cuantificador universal  $\forall xP(x)$ , es verdadero si en cada sustitución de  $x$ ,  $P(x)$  es verdadero.*

**Definición 14** *Cuantificador existencial  $\exists xP(x)$ , es verdadero si  $P(x)$  es verdadero al menos para un  $x$ .*

**Proposición 2**  $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x, \neg P(x)$ .

**Proposición 3**  $\neg\exists xP(x) \equiv \forall x, \neg P(x)$ .

### 1.1.10. Argumentos válidos

**Definición 15** *Un argumento es una sucesión finita de  $n$  proposiciones, de las cuales las primeras  $n - 1$  se llaman premisas y la última conclusión.*

**Definición 16** *Dado un argumento  $P_1, P_2, \dots, P_n$  el condicional  $P_1 \& P_2 \& \dots \& P_{n-1} \Rightarrow P_n$  se le llama condicional asociado.*

### 1.1.11. Ejercicios

Verificar si los siguientes argumentos son o no válidos.

1. Ejercicio 1

- a)  $\neg s \& c$ .
- b)  $w \Rightarrow s$ .
- c)  $\neg w \Rightarrow t$ .
- d)  $t \Rightarrow h$ .

$\vdash h$ .

2. Ejercicio 2, demostrar:

- a)  $n$  es número entero.
- b)  $3n + 2$  es número entero impar.

Entonces,  $n$  es impar.

3. Ejercicio 3

- a)  $(a \vee b) \Rightarrow c$ .
- b)  $e \Rightarrow f$ .
- c)  $\neg a \Rightarrow e$ .
- d)  $k \& \neg e$ .

$\vdash c$ .

4. Ejercicio 4

- a)  $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \vee d)$ .
- b)  $(c \vee d) \Rightarrow k$ .
- c)  $k \Rightarrow e$ .
- d)  $\neg e \& \neg a$ .

$\vdash \neg(a \Rightarrow b)$ .

## 5. Ejercicio 5

a)  $(a \vee b) \Rightarrow \neg c.$

b)  $a \vee k.$

c)  $\neg k.$

$\vdash \neg(c \vee k).$

## 6. Ejercicio 6

a)  $f \Rightarrow \neg g.$

b)  $\neg f \Rightarrow (h \Rightarrow \neg g).$

c)  $(\neg i \vee \neg h) \Rightarrow g.$

d)  $\neg i.$

$\vdash \neg h.$

## 7. Ejercicio 7

a)  $m \Rightarrow n.$

b)  $\neg(n \vee c).$

c)  $m \vee b.$

$\vdash b.$

## 8. Ejercicio 8

a)  $q \Rightarrow r.$

b)  $\neg s \Rightarrow (t \Rightarrow u).$

c)  $s \vee (q \vee t).$

d)  $\neg s.$

$\vdash r \vee u.$

**Definición 17** *Un argumento es válido o correcto si el condicional asociado es verdadero.*

# Capítulo 2

## Conjuntos

### 2.1. Definiciones

**Definición 18** *Un conjunto es una colección de objetos que cumplen cierta propiedad.*

**Definición 19** *La relación  $x \in A$  es una propocición que es verdadera si el elemento  $x$  está en el conjunto  $A$ . Es falsa si el elemento  $x$  no está en el conjunto  $A$ .*

Observece que la negación de  $x \in A$  es decir  $\neg(x \in A)$  se puede escribir como  $x \notin A$ .

Un conjunto de puede denotar de acuerdo a la característica que tienen sus elementos,  $\{x \mid P(x)\}$ , por ejemplo

1.  $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{es es número par}\}$ .
2.  $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{es es primo}\}$ .

O de manera explícita, escribiendo sus elementos.

Ejemplos de conjuntos:

1.  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
2.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
3.  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ .
4.  $\mathbb{R} = \{ \text{Números reales} \}$ .
5.  $\mathbb{C} = \{ \text{Números complejos} \}$ .

**Axioma 1** *(de la especificación): para cada conjunto y para cada condición  $S(x)$ , existe un conjunto  $B$  de elementos que están en  $A$  y cumplen  $S$ .*

$$B = \{x \mid (x \in A) \& S(x)\}$$

**Axioma 2** *(de la extensión): dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.*

$$A = B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \& (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

**Axioma 3** (de la unión): para dos conjuntos  $A, B$  existe otro que contienen todos los elementos de ambos conjuntos.

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

**Axioma 4** (de la intersección): para dos conjuntos  $A, B$  existe otro que contienen a los elementos que están en ambos conjuntos.

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \& (x \in B)\}$$

**Definición 20** Un conjunto  $A$  esta contenido en un conjunto  $B$  si:

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

**Axioma 5** (de la potencia): para todo conjunto  $A$  existe otro llamado el potencia que consiste en el conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

**Definición 21** Existe un conjunto llamado vacío  $\emptyset$  tal que no tiene elementos.

**Definición 22** Existe un conjunto llamado complemento de  $A$  que consiste de los elementos que no están en  $A$ .

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

**Definición 23** Dados los conjuntos  $A, B$  la resta de  $A - B$  es el conjunto de elementos que están en  $A$ , pero no en  $B$ .

$$A - B = \{x | x \in A \& x \notin B\}$$

**Definición 24** Dados los conjuntos  $A, B$  la resta simetrica se define como:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Propiedades, operaciones entre conjuntos:

1.  $(A^c)^c = A$
2.  $\emptyset \subset A$ .
3.  $A \subset A$ .
4. Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , entonces  $A \subset C$ .
5.  $A \cap B = B \cap A$ .
6.  $A \cup B = B \cup A$ .
7.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
8.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
9.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
10.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
11.  $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$ .
12.  $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ .
13.  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$ .

14.  $A - B = \emptyset$  si y sólo si  $A \subseteq B$ .
15.  $A \Delta A = \emptyset$ .
16.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ .
17.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ .
18.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ .
19.  $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \ \& \ A \subseteq C$ .
20.  $B \cup C \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq A \ \& \ C \subseteq A$ .
21.  $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$ .
22.  $A \cap B = A - (A - B)$ .
23.  $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ .
24.  $A = B$  si y sólo si  $A \Delta B = \emptyset$ .

# Capítulo 3

## Estructuras algebraicas

### 3.1. Grupos

**Definición 25** Sea  $G$  un conjunto y  $+$  una operación binaria de  $G \times G$  en  $G$ , es decir toma dos elementos de  $G$  y le asocia otro del mismo  $G$ . Entonces si:

1.  $+$  es cerrada, es decir  $\forall g_1, g_2 \in G, \quad g_1 + g_2 \in G$ .
2. Es conmutativa, es decir  $\forall g_1, g_2, \quad g_1 + g_2 = g_2 + g_1$ .
3. Es asociativa, es decir  $\forall g_1, g_2, g_3, \quad g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$ .
4. Existencia del neutro aditivo, es decir  $\exists 0 \in G \quad \forall g \in G, \quad 0 + g = g + 0 = 0$ .
5. Existencia de los inversos aditivos, es decir  $\forall g \in G \quad \exists -g \in G$

$$g + (-g) = (-g) + g = 0.$$

$G$  se llama **grupo abeliano**.

**Definición 26** Sea  $R$  un conjunto con dos operaciones  $+, \cdot$  binarias de  $G \times G$  en  $G$ . Entonces si:

1.  $(G, +)$  es un grupo abeliano.
2. Es asociativa, es decir  $\forall g_1, g_2, g_3, \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ .
3. Es distributivo  $\forall g_1, g_2, g_3, \quad g_1 \cdot (g_2 + g_3) = (g_1 \cdot g_2) + (g_1 \cdot g_3)$ .

$G$  se llama **anillo**.

**Definición 27** Sea  $R$  un anillo. Entonces si:

1. Es conmutativa con el producto, es decir  $\forall g_1, g_2, \quad g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ , se llama **anillo conmutativo**.
2. Existencia del neutro multiplicativo, es decir  $\exists 1 \in G \quad \forall g \in G, \quad 1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ , se llama **anillo con identidad**.
3. No tiene divisores de cero, es decir  $\forall g_1, g_2, \quad g_1 \cdot g_2 = 0$  implica que  $g_1 = 0$  ó  $g_2 = 0$ , se llama **dominio entero**.
4. Además tiene la propiedad de euclides, se llama **dominio entero euclidiano**.

**Definición 28** Sea  $R$  un anillo conmutativo con identidad. Entonces si:

1.  $R^*$  es grupo abeliano.

Se llama **campo**.

**Propiedades de grupo abeliano de los  $\mathbb{R}$  con la suma  $(\mathbb{R}, +)$ .**

1. Para todo reales  $a, b$ , entonces  $a + b \in \mathbb{R}$ , (cerradura).
2. Para todo reales  $a, b$ , entonces  $a + b = b + a$ , (conmutatividad).
3. Para todo reales  $a, b, c$ , tenemos que  $a + (b + c) = (a + b) + c$ , (asociatividad).
4. Existe un elemento  $0 \in \mathbb{R}$ , llamado cero, tal que  $a + 0 = 0 + a = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , (existencia del neutro aditivo).
5. Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existe un real llamado inverso aditivo  $(-a)$ , tal que  $a + (-a) = 0$ , (existencia del inverso aditivo).

**Propiedades de grupo abeliano de los  $\mathbb{R}$  con el producto  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ .**

1. Para todo reales  $a, b$ , entonces  $a \cdot b \in \mathbb{R}$ , (cerradura).
2. Para todo reales  $a, b$ , entonces  $a \cdot b = b \cdot a$ , (conmutatividad).
3. Para todo reales  $a, b, c$ , tenemos que  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , (asociatividad).
4. Existe un elemento  $1 \in \mathbb{R}$ , llamado uno, tal que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , (existencia del neutro multiplicativo).
5. Para todo  $a \in \mathbb{R}^*$ , existe un real llamado inverso multiplicativo  $(a^{-1})$ , tal que  $a \cdot (a^{-1}) = 1$ , (existencia del inverso multiplicativo).

**Propiedades distributiva de la suma respecto al producto en los  $\mathbb{R}$ .**

1. Para todo reales  $a, b, c$ , tenemos que  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ , (distributividad).
1. Los números enteros son grupo abeliano con la suma, y son dominio entero euclidiano con el producto.
2. Los números racionales son campo.
3. Los números reales con campo.
4. Los números complejos con campo.