División de Polinomios

Ejercicios de división de polinomios

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

1 Introducción

Uno de los temas más complicados es la división de polinomios, principalmente porque las operaciones no son muy frecuentes en muchos cursos. De hecho la división no es más que una multiplicación por un inversos multiplicativos.

Otras de las propiedades usadas en la división se listan a continuación:

1. Ley de los signos:
   a) $+$ entre $+$ da $+$
   b) $-$ entre $+$ da $-$
   c) $+$ entre $-$ da $-$
   d) $-$ entre $-$ da $+$
2. Ley de los exponentes:
   a) Al multiplicar potencias con la misma base, las potencias se suman:
   $$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
   b) Al potenciar potencias con la misma base, las potencias se multiplican:
   $$(a^n)^m = a^{nm}$$
   c) Al dividir potencias con la misma base, las potencias se restan:
   $$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Haremos uso también de la siguiente notación:

1. Un monomio es un término como ax, donde a representa una constante y se llama coeficiente y x representa una variable y se llama indeterminada.
2. Un binomio tiene la forma de la suma de dos monomios: por ejemplo $ax + bx^2$.
3. Polinomio se usa para denotar suma de más de 3 monomios, por ejemplo $ax + bx^2 + cx^3$.

2

División de monomios

1. $-a^2b$ entre $-ab$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{-a^2b}{-ab} &= +a^{2-1}b^{1-1} \\ &= a^1b^0 \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{-a^2b}{-ab} = a$$

2. $16m^6n^4$ entre $-5n^3$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{16m^6n^4}{-5n^3} &= -\frac{16}{5}m^6n^{4-3} \\ &= -\frac{16}{5}m^6n^1 \\ &= -\frac{16\,m^6n}{5} \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{16\,m^6n^4}{-5n^3} = -\frac{16\,m^6n}{5}$$

3. a^{m+3} entre a^{m+2}

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a^{m+3}}{a^{m+2}} &= a^{m+3-(m+2)} \\ &= a^{m+3-m-2} \\ &= a \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{a^{m+3}}{a^{m+2}} = a$$

4. $3m^4n^5p^6$ entre $-\frac{1}{3}m^4np^5$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3m^4n^5p^6}{-\frac{1}{3}m^4np^5} &= -\frac{3}{\frac{1}{3}}m^{4-4}n^{5-1}p^{6-5} \\ &= -9m^0n^4p^1 \\ &= -9n^4p \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{3m^4n^5p^6}{-\frac{1}{3}m^4np^5} = -9n^4p$$

5. $-\frac{1}{15}a^{x-3}b^{m+5}c^2$ entre $\frac{3}{5}a^{x-4}b^{m-1}$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{1}{15}a^{x-3}b^{m+5}c^2}{\frac{3}{5}a^{x-4}b^{m-1}} &= -\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}}a^{x-3-(x-4)}b^{m+5-(m-1)}c^2 \\ &= -\frac{1}{9}a^1b^6c^2 \\ &= -\frac{1}{9}ab^6c^2 \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{-\frac{1}{15}a^{x-3}b^{m+5}c^2}{\frac{3}{5}a^{x-4}b^{m-1}} = -\frac{1}{9}ab^6c^2$$

Algunos errores comúnmente hechos:

Observación 1 *Multiplicar* $(-a)(bc)$ *no es igual a* $(-ab)(-ac)$.

3

División de un polinomio por un monomio

Observación 2 *En la división de un polinomio por un monomio se puede hacer uso de la ley distributiva* $a(b+c) = ab + ac$.

1. $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3} &= \frac{4x^8}{2x^3} - \frac{10x^6}{2x^3} - \frac{5x^4}{2x^3} \\ &= 2x^{8-3} - 5x^{6-3} - \frac{5}{2}x^{4-3} \\ &= 2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x^1 \\ &= 2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x \end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3} = 2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x$$

2. $4a^{x+4}b^{m-1} - 6a^{x+3}b^{m-2} + 8a^{x+2}b^{m-3}$ entre $-2a^{x+2}b^{m-4}$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{4a^{x+4}b^{m-1} - 6a^{x+3}b^{m-2} + 8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} &= \frac{4a^{x+4}b^{m-1}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} - \frac{6a^{x+3}b^{m-2}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} + \frac{8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} \\
&= -2a^{x+4-(x+2)}b^{m-1-(m-4)} \\
&\quad +3a^{x+3-(x+2)}b^{m-2-(m-4)} \\
&\quad -4a^{x+2-(x+2)}b^{m-3-(m-4)} \\
&= -2a^2b^3 + 3a^1b^2 - 4a^0b^1 \\
&= -2a^2b^3 + 3ab^2 - 4b
\end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{4a^{x+4}b^{m-1} - 6a^{x+3}b^{m-2} + 8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} = -2a^2b^3 + 3ab^2 - 4b$$

3. $-\frac{3}{4}a^{n-1}x^{m+2} + \frac{1}{8}a^nx^{m+1} - \frac{2}{3}a^{n+1}x^m$ entre $-\frac{2}{5}a^3x^2$

Paso 1 Usando la ley de signos, y la ley de los exponentes ($a^0 = 1$), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{3}{4}a^{n-1}x^{m+2} + \frac{1}{8}a^nx^{m+1} - \frac{2}{3}a^{n+1}x^m}{-\frac{2}{5}a^3x^2} &= \frac{-\frac{3}{4}a^{n-1}x^{m+2}}{-\frac{2}{5}a^3x^2} + \frac{\frac{1}{8}a^nx^{m+1}}{-\frac{2}{5}a^3x^2} + \frac{-\frac{2}{3}a^{n+1}x^m}{-\frac{2}{5}a^3x^2} \\
&= \frac{15}{8}a^{n-1-(3)}x^{m+2-(2)} \\
&\quad -\frac{5}{16}a^{n-(3)}x^{m+1-(2)} \\
&\quad +\frac{10}{6}a^{n+1-(3)}x^{m-(2)} \\
&= \frac{15}{8}a^{n-4}x^m - \frac{5}{16}a^{n-3}x^{m-1} + \frac{10}{6}a^{n-2}x^{m-2}
\end{aligned}$$

Paso 2 Por lo tanto

$$\frac{-\frac{3}{4}a^{n-1}x^{m+2} + \frac{1}{8}a^nx^{m+1} - \frac{2}{3}a^{n+1}x^m}{-\frac{2}{5}a^3x^2} = \frac{15}{8}a^{n-4}x^m - \frac{5}{16}a^{n-3}x^{m-1} + \frac{5}{3}a^{n-2}x^{m-2}$$

4

División de un polinomio por un polinomio

Observación 3 *En una división de polinomios que tiene la forma:*

$$\begin{array}{r|l} & h \\ g & \overline{f} \\ & r \end{array}$$

f *es llamado dividendo,* g *el divisor,* h *el cociente y* r *el residuo. Siempre obtendremos que:*

$$f = g \cdot h + r$$

1. $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$

Paso 1 Se dividen los primeros términos del dividendo y el divisor $\dfrac{a^2}{a} = a$, el resultado es el primer término del cociente:

$$\begin{array}{r|l} & a \\ a+3 & \overline{a^2 + 2a - 3} \end{array}$$

Paso 2 Se multiplica a por $a + 3$, se cambia el signo y se coloca abajo del dividendo:

$$
\begin{array}{rl}
 & a \\
a+3 & \overline{\big)\, a^2+2a-3} \\
 & -a^2-3a
\end{array}
$$

Paso 3 Se realiza la suma.

$$
\begin{array}{rl}
 & a \\
a+3 & \overline{\big)\, a^2+2a-3} \\
 & \underline{-a^2-3a} \\
 & \quad 0-a
\end{array}
$$

Paso 4 Se dividen ahora $\frac{-a}{a} = -1$, el resultado será el segundo término del cociente:

$$
\begin{array}{rl}
 & a-1 \\
a+3 & \overline{\big)\, a^2+2a-3} \\
 & \underline{-a^2-3a} \\
 & \qquad -a
\end{array}
$$

Paso 5 Se multiplica -1 por $a+3$ se cambia de signo y se coloca abajo del residuo hasta ahora obtenido:

$$
\begin{array}{rl}
 & a-1 \\
a+3 & \overline{\big)\, a^2+2a-3} \\
 & \underline{-a^2-3a} \\
 & \qquad -a \\
 & \qquad\quad a+3
\end{array}
$$

Paso 6 Se suma lo obtenido con los términos correspondientes:

$$
\begin{array}{rl}
 & a-1 \\
a+3 & \overline{\big)\, a^2+2a-3} \\
 & \underline{-a^2-3a} \\
 & \qquad -a \\
 & \qquad\quad \underline{a+3} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Paso 7 Por lo tanto

$$\frac{a^2+2a-3}{a+3} = a-1$$

2. $am^4 - am - 2a$ entre $am + a$

Paso 1 Se dividen los primeros términos del dividendo y el divisor $\frac{am^4}{am} = m^3$, el resultado es el primer término del cociente:

$$
\begin{array}{rl}
 & m^3 \\
am+a & \overline{\big)\, am^4-am-2a}
\end{array}
$$

Paso 2 Se multiplica m^3 por $am+a$, se cambia el signo y se coloca abajo del dividendo:

$$\begin{array}{ll} & m^3 \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & -am^4 - am^3 \end{array}$$

Paso 3 Se realiza la suma.

$$\begin{array}{ll} & m^3 \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & \underline{-am^4 - am^3} \\ & \quad 0 - am^3 - am - 2a \end{array}$$

Paso 4 Se dividen ahora $\dfrac{-am^3}{am} = -m^2$, el resultado será el segundo término del cociente:

$$\begin{array}{ll} & m^3 - m^2 \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & \underline{-am^4 - am^3} \\ & \quad 0 - am^3 - am - 2a \end{array}$$

Paso 5 Se multiplica $-m^2$ por $am + a$, se cambia de signo y se coloca abajo del residuo hasta ahora obtenido:

$$\begin{array}{ll} & m^3 - m^2 \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & \underline{-am^4 - am^3} \\ & \quad 0 - am^3 - am - 2a \\ & \qquad\quad am^3 + am^2 \end{array}$$

Paso 6 Se suma lo obtenido con los términos correspondientes:

$$\begin{array}{ll} & m^3 - m^2 \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & \underline{-am^4 - am^3} \\ & \quad 0 - am^3 - am - 2a \\ & \qquad\quad \underline{am^3 + am^2 \qquad\quad} \\ & \qquad\quad\; 0 + am^2 - am - 2a \end{array}$$

Paso 7 Se dividen ahora $\dfrac{am^2}{am} = m$, el resultado será el tercer término del cociente:

$$\begin{array}{ll} & m^3 - m^2 + m \\ am+a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\ & \underline{-am^4 - am^3} \\ & \quad 0 - am^3 - am - 2a \\ & \qquad\quad \underline{am^3 + am^2 \qquad\quad} \\ & \qquad\quad\; 0 + am^2 - am - 2a \end{array}$$

Paso 8 Se multiplica m por $am + a$, se cambia de signo y se coloca abajo del residuo hasta ahora obtenido:

$$
\begin{array}{ll}
 & m^3 - m^2 + m \\
am + a & \overline{)\,am^4 - am - 2a} \\
 & \underline{-am^4 - am^3} \\
 & 0 - am^3 - am - 2a \\
 & \quad \underline{am^3 + am^2} \\
 & \quad 0 + am^2 - am - 2a \\
 & \quad\quad -am^2 - am
\end{array}
$$

Paso 9 Se suma lo obtenido con los términos correspondientes:

$$
\begin{array}{ll}
 & m^3 - m^2 + m \\
am + a & \overline{)\,am^4 - am - 2a} \\
 & \underline{-am^4 - am^3} \\
 & 0 - am^3 - am - 2a \\
 & \quad \underline{am^3 + am^2} \\
 & \quad 0 + am^2 - am - 2a \\
 & \quad\quad \underline{-am^2 - am} \\
 & \quad\quad 0 - 2am - 2a
\end{array}
$$

Paso 10 Se dividen ahora $\frac{-2am}{am} = -2$, el resultado será el cuarto término del cociente:

$$
\begin{array}{ll}
 & m^3 - m^2 + m - 2 \\
am + a & \overline{)\,am^4 - am - 2a} \\
 & \underline{-am^4 - am^3} \\
 & 0 - am^3 - am - 2a \\
 & \quad \underline{am^3 + am^2} \\
 & \quad 0 + am^2 - am - 2a \\
 & \quad\quad \underline{-am^2 - am} \\
 & \quad\quad 0 - 2am - 2a
\end{array}
$$

Paso 11 Se multiplica -2 por $am + a$, se cambia de signo y se coloca abajo del residuo hasta ahora obtenido:

$$
\begin{array}{ll}
 & m^3 - m^2 + m - 2 \\
am + a & \overline{)\,am^4 - am - 2a} \\
 & \underline{-am^4 - am^3} \\
 & 0 - am^3 - am - 2a \\
 & \quad \underline{am^3 + am^2} \\
 & \quad 0 + am^2 - am - 2a \\
 & \quad\quad \underline{-am^2 - am} \\
 & \quad\quad 0 - 2am - 2a \\
 & \quad\quad\quad 2am + 2a
\end{array}
$$

Paso 12 Se suma lo obtenido con los términos correspondientes:

$$
\begin{array}{ll}
 & m^3 - m^2 + m - 2 \\
am + a & \sqrt{am^4 - am - 2a} \\
 & \underline{-am^4 - am^3} \\
 & 0 - am^3 - am - 2a \\
 & \underline{am^3 + am^2} \\
 & 0 + am^2 - am - 2a \\
 & \underline{-am^2 - am} \\
 & 0 - 2am - 2a \\
 & \underline{2am + 2a} \\
 & 0
\end{array}
$$

Paso 7 Por lo tanto

$$\frac{am^4 - am - 2a}{am + a} = m^3 - m^2 + m - 2$$