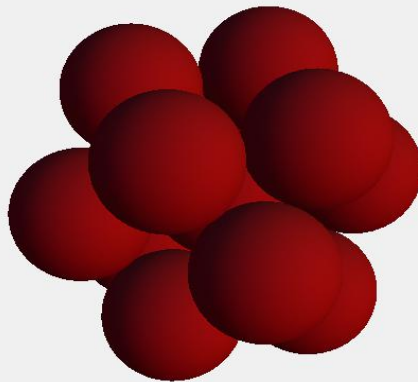


MathCon

The Mathematics Firm

Potencias y Radicales

Potencias y Radicales



www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2012

Contenido

1. Potencias	2
1.1. Reglas de los números reales	2
1.2. Reglas de potencias de reales	2
1.3. Ejercicios	3
2. Radicales	6
2.1. Ejercicios	6

Capítulo 1

Potencias

1.1. Reglas de los números reales

Propiedades de grupo abeliano de los \mathbb{R} con la suma $(\mathbb{R}, +)$.

1. Para todo reales a, b , entonces $a + b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Para todo reales a, b , entonces $a + b = b + a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c , tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, llamado cero, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro aditivo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un real llamado inverso aditivo $(-a)$, tal que $a + (-a) = 0$, (existencia del inverso aditivo).

Propiedades de grupo abeliano de los \mathbb{R} con el producto (\mathbb{R}^*, \cdot) , $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Para todo reales a, b , entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Para todo reales a, b , entonces $a \cdot b = b \cdot a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c , tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, llamado uno, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro multiplicativo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un real llamado inverso multiplicativo (a^{-1}) , tal que $a \cdot (a^{-1}) = 1$, (existencia del inverso multiplicativo).

Propiedades distributiva de la suma respecto al producto en los \mathbb{R} .

1. Para todo reales a, b, c , tenemos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (distributividad).

1.2. Reglas de potencias de reales

Definición 1 Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo, entonces:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$

2. $a^0 = 1.$

3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0.$

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$

2. $(a^n)^m = a^{nm}.$

3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$

4. $(ab)^n = a^n b^n.$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

1.3. Ejercicios

Aplicando las propiedades de potencias y de números reales obtener el valor numerico de:

1.

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^5 &= 2^{2+5} \\ &= 2^7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 &= 3^{3+2+1} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (3^3)^2 &= 3^{3 \cdot 2} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (3^3 \cdot 3^4)^3 &= (3^{3+4})^3 \\ &= (3^7)^3 \\ &= 3^{21} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{3^4}{3^3} &= 3^{4-3} \\ &= 3^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^3}{2^5}\right) \left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{1}{2^2}\right) \left(\frac{2^5}{1}\right) \\ &= \left(\frac{2^5}{2^2}\right) \\ &= 2^{5-2} \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^3}{2^5}\right) \left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{2^3}{1}\right) \left(\frac{2^7}{2^7}\right) \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3 \left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{3^9}{3^{15}}\right) \left(\frac{3^4}{3^6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right) \left(\frac{1}{3^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right) \\ &= 3^{-8} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3 \left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right) \left(\frac{1}{3^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right) \\ &= 3^{-8} \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3 \left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= 3^{9+4-15-6} \\ &= 3^{-8} \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^2 3^3}{3^4}\right)^2 \left(\frac{2^2 3^4}{2^5 3^2}\right)^3 \left(\frac{6}{12}\right)^2 &= \left(\frac{2^2}{3}\right)^2 \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2^{4-9-2} 3^{-2+6} \\ &= 2^{-7} 3^4 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \frac{2^{-2} \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 6^{-2}}{3^{-1} \cdot 2^3 \cdot 3^{-2}} &= 2^{-2+4-3} \cdot 3^{2-5+1+2} (3 \cdot 2)^{-2} \\ &= 2^{-2+4-3-2} \cdot 3^{2-5+1+2-2} \\ &= 2^{-3} \cdot 3^{-2} \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} (2^2)^3 - [(-2)^3 \cdot (2)^{-1}] + (5^2)^3 &= 2^6 - [-2^3 \cdot 2^{-1}] + 5^6 \\ &= 2^6 + 2^2 + 5^6 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} &= \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{2^4}{3} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{2^3}{3 \cdot 5} \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} (0,75)^{-2} \cdot (0,01)^2 \cdot \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-1} \cdot \frac{3^3}{4^3} \\ &= \frac{4^2}{3^2} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{4^3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(5 \cdot 2)^4} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^4 \cdot 5^4} \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} (3x^4y^{-2})(5x^7y^3)^2 &= (3x^4y^{-2})(25x^{14}y^6) \\ &= 75x^{18}y^4 \end{aligned}$$

17.

$$\left(\frac{-y^{2/3}}{y^{-4/3}}\right)^3 = \frac{-y^2}{y^{-4}}$$

Capítulo 2

Radicales

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $n, k \in \mathbb{Z}$

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
4. $\sqrt[n]{a} \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$.
5. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

2.1. Ejercicios

Aplicando las propiedades de radicales y los números reales realizar las siguientes operaciones:

1. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{2^6 \cdot 5} \\ &= \sqrt[3]{2^6} \sqrt[3]{5} \\ &= 2^{\frac{6}{3}} \sqrt[3]{5} \\ &= 2^2 \sqrt[3]{5} \\ &= 4\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

2. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-125} &= \sqrt[3]{-5^3} \\ &= -5^{\frac{3}{3}} \\ &= -5\end{aligned}$$

3. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt{245} &= \sqrt{5 \cdot 7^2} \\ &= 7\sqrt{5}\end{aligned}$$

4. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{80} &= \sqrt[4]{5 \cdot 2^4} \\ &= 2\sqrt[4]{5}\end{aligned}$$

5. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{12500} &= \sqrt[5]{4 \cdot 5^5} \\ &= 5\sqrt[5]{4}\end{aligned}$$

6. Escribir como potencias :

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

7. Escribir como potencias :

$$\sqrt{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

8. Escribir como potencias :

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{7^{-4}} &= 7^{-\frac{4}{6}} \\ &= 7^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

9. Escribir usando el signo de raíz :

$$7^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{7^3}$$

10. Escribir usando el signo de raíz :

$$(7,5)^{0,25} = \left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

11. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{5}} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}} : \sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2 &= (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot \left((5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} : (5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{8}}\right)^2 \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}}\right)^2 \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^{\frac{1}{24}}\right)^2 \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{12}} \\ &= 5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} \\ &= 5^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

12. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} : \left(\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(2^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} : \left(\left(2^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(2^{\frac{2}{3}} \right) : \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(2^{\frac{2}{3}} \right) : \left(2^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(2^{\frac{2}{3}} \right) : \left(2^{\frac{5}{12}} \right) \\
 &= \left(2^{\frac{2}{3} - \frac{5}{12}} \right) \\
 &= 2^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

13. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} : \left(\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} &= \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} : \left(\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}} : \left(\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[5]{\frac{3}{4}}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \sqrt[3]{3 \cdot 3^{\frac{3}{8}}} : \left(\sqrt[3]{3 \cdot 3^{\frac{5}{12}}} : \sqrt[4]{3\sqrt[4]{\frac{4}{6}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \sqrt[3]{3^{\frac{11}{8}}} : \left(\sqrt[3]{3^{\frac{17}{12}}} : \sqrt[4]{3\sqrt[4]{\frac{4}{6}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 3^{\frac{11}{24}} : \left(3^{\frac{17}{24}} : 3^{\frac{4}{24}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 3^{\frac{11}{24}} : \left(3^{\frac{13}{24}} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 3^{\frac{11}{24}} : 3^{\frac{39}{48}} \\
 &= 3^{\frac{22}{48} - \frac{39}{48}} \\
 &= 3^{\frac{17}{48}}
 \end{aligned}$$

14. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[3]{16 \sqrt[4]{8 \sqrt{2}}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{32 \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2 \sqrt[4]{4 \sqrt[3]{4}}} &= \left(\sqrt[3]{16 \sqrt[4]{8 \sqrt{2}}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{32 \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2 \sqrt[4]{4 \sqrt[3]{4}}} \\
 &= \left(\sqrt[3]{2^4 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{2^5 \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2 \sqrt[4]{2^2 \sqrt[3]{2^2}}} \\
 &= \left(\sqrt[3]{2^4 \sqrt[4]{2^{\frac{7}{2}}}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{2^{\frac{21}{4}}} \cdot \sqrt{2 \sqrt[4]{2^{\frac{8}{3}}}} \\
 &= \left(\sqrt[3]{2^4 \cdot 2^{\frac{7}{8}}} \right)^2 \cdot 2^{\frac{21}{12}} \cdot \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{8}{12}}} \\
 &= \left(\sqrt[3]{2^{\frac{39}{8}}} \right)^2 \cdot 2^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt{2^{\frac{20}{12}}} \\
 &= \left(2^{\frac{13}{8}} \right)^2 \cdot 2^{\frac{7}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} \\
 &= 2^{\frac{13}{4}} \cdot 2^{\frac{7}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} \\
 &= 2^5 \cdot 2^{\frac{5}{6}} \\
 &= 2^{\frac{35}{6}}
 \end{aligned}$$