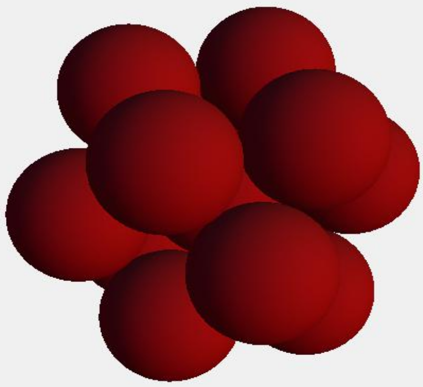
MathCon

The Mathematics Firm

Potencias y Radicales

Potencias y Radicales



www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

Capítulo 1

Potencias

1.1. Reglas de los números reales

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con la suma $(\mathbb{R}, +)$.

1. Para todo reales a, b, entonces $a + b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a, b, entonces $a + b = b + a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a + (b + c) = (a + b) + c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, llamado cero, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, $\bigvee a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro aditivo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un real llamado inverso aditivo $(-a)$, tal que $a+(-a) = 0$, (existencia del inverso aditivo).

Propiedades de grupo abeliano de los $\mathbb{R}$ con el producto $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Para todo reales a, b, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}$, (cerradura).
2. Pata todo reales a, b, entonces $a \cdot b = b \cdot a$, (conmutatividad).
3. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (asociatividad).
4. Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, llamado uno, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\bigvee a \in \mathbb{R}$, (existencia del neutro multiplicativo).
5. Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un real llamado inverso multiplicativo (a^{-1}), tal que $a \cdot (a^{-1}) = 1$, (existencia del inverso multiplicativo).

Propiedades distributiva de la suma respecto al producto en los $\mathbb{R}$.

1. Para todo reales a, b, c, tenemos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (distributividad).

1.2. Reglas de potencias de reales

Definición 1 *Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo, entonces:*

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$.

2. $a^0 = 1$.
3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ *con* $a \neq 0$.

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $(a^n)^m = a^{nm}$.
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

1.3. Ejercicios

Aplicando las propiedades de potencias y de números reales obtener el valor numerico de:

1.

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^5 &= 2^{2+5} \\ &= 2^7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 &= 3^{3+2+1} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (3^3)^2 &= 3^{3\cdot 2} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (3^3 \cdot 3^4)^3 &= (3^{3+4})^3 \\ &= (3^7)^3 \\ &= 3^{21} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{3^4}{3^3} &= 3^{4-3} \\ &= 3^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^3}{2^5}\right)\left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{2^5}{1}\right)\\ &= \left(\frac{2^5}{2^2}\right)\\ &= 2^{5-2}\\ &= 2^3\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^3}{2^5}\right)\left(\frac{2^7}{2^2}\right) &= \left(\frac{2^3}{1}\right)\left(\frac{2^7}{2^7}\right)\\ &= 2^3\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{3^9}{3^{15}}\right)\left(\frac{3^4}{3^6}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right)\left(\frac{1}{3^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right)\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= \left(\frac{1}{3^2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{3^6}\right)\left(\frac{1}{3^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3^8}\right)\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3^3}{3^5}\right)^3\left(\frac{3^2}{3^3}\right)^2 &= 3^{9+4-15-6}\\ &= 3^{-8}\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^2 3^3}{3^4}\right)^2\left(\frac{2^2 3^4}{2^5 3^2}\right)^3\left(\frac{6}{12}\right)^2 &= \left(\frac{2^2}{3}\right)^2\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 2^{4-9-2}3^{-2+6}\\ &= 2^{-7}3^4\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\frac{2^{-2}\cdot 2^{4}\cdot 3^{2}\cdot 3^{-5}\cdot 6^{-2}}{3^{-1}\cdot 2^{3}\cdot 3^{-2}} &= 2^{-2+4-3}\cdot 3^{2-5+1+2}(3\cdot 2)^{-2}\\ &= 2^{-2+4-3-2}\cdot 3^{2-5+1+2-2}\\ &= 2^{-3}\cdot 3^{-2}\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}(2^2)^3-[(-2)^3\cdot(2)^{-1}]+(5^2)^3 &= 2^6-[-2^3\cdot 2^{-1}]+5^6\\ &= 2^6+2^2+5^6\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} &= \frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{2^6}{3^3}\cdot\frac{5}{2}\\ &= \frac{2^4}{3}\cdot\frac{5}{2}\\ &= \frac{2^3}{3\cdot 5}\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}(0{,}75)^{-2}\cdot(0{,}01)^{2}\cdot\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3} &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right)^{-1}\cdot\frac{3^3}{4^3}\\ &= \frac{4^2}{3^2}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^3}{4^3}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(5\cdot 2)^4}\\ &= \frac{1}{3\cdot 2^4\cdot 5^4}\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}\left(3x^4y^{-2}\right)\left(5x^7y^3\right)^2 &= \left(3x^4y^{-2}\right)\left(25x^{14}y^6\right)\\ &= 75x^{18}y^4\end{aligned}$$

17.

$$\left(\frac{-y^{2/3}}{y^{-4/3}}\right)^{3} = \frac{-y^2}{y^{-4}}$$

Capítulo 2

Radicales

Las siguientes propiedades se cumplen para $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $n, k \in \mathbb{Z}$

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
4. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$.
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

2.1. Ejercicios

Aplicando las propiedades de radicales y los números reales realizar las siguientes operaciones:

1. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{2^6 5}\\ &= \sqrt[3]{2^6}\,\sqrt[3]{5}\\ &= 2^{\frac{6}{3}}\,\sqrt[3]{5}\\ &= 2^2\,\sqrt[3]{5}\\ &= 4\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

2. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-125} &= \sqrt[3]{-5^3}\\ &= -5^{\frac{3}{3}}\\ &= -5\end{aligned}$$

3. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt{245} &= \sqrt{5 \cdot 7^2}\\ &= 7\sqrt{5}\end{aligned}$$

4. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{80} &= \sqrt[4]{5\cdot 2^4}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

5. Sacar números enteros del signo de raíz de la siguente expresión:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{12500} &= \sqrt[5]{4\cdot 5^5}\\ &= 5\sqrt[5]{4}\end{aligned}$$

6. Escribir como potencias :

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

7. Escribir como potencias :

$$\sqrt{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

8. Escribir como potencias :

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{7^{-4}} &= 7^{-\frac{4}{6}}\\ &= 7^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

9. Escribir usando el signo de raíz :

$$7^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{7^3}$$

10. Escribir usando el signo de raíz :

$$(7{,}5)^{0{,}25} = \left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

11. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}}\right)^2 &= (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot\left((5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}:(5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{6}}:5^{\frac{1}{8}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(5^{\frac{1}{24}}\right)^2\\ &= 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{12}}\\ &= 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}\\ &= 5^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

12. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2^{\frac{2}{3}}\right) : \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2^{\frac{2}{3}}\right) : \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2^{\frac{2}{3}}\right) : \left(2^{\frac{5}{12}}\right) \\
&= \left(2^{\frac{2}{3}-\frac{5}{12}}\right) \\
&= 2^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

13. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} : \left(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} &= \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}} : \left(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} : \sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3^{\frac{3}{2}}}} : \left(\sqrt{3\sqrt[3]{3^{\frac{5}{4}}}} : \sqrt[4]{\sqrt{3^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \sqrt[3]{3\cdot 3^{\frac{3}{8}}} : \left(\sqrt{3\cdot 3^{\frac{5}{12}}} : \sqrt[4]{3^{\frac{4}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \sqrt[3]{3^{\frac{11}{8}}} : \left(\sqrt{3^{\frac{17}{12}}} : \sqrt[4]{3^{\frac{4}{6}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 3^{\frac{11}{24}} : \left(3^{\frac{17}{24}} : 3^{\frac{4}{24}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 3^{\frac{11}{24}} : \left(3^{\frac{13}{24}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 3^{\frac{11}{24}} : 3^{\frac{39}{48}} \\
&= 3^{\frac{22}{48}-\frac{39}{48}} \\
&= 3^{\frac{17}{48}}
\end{aligned}$$

14. Encontrar el valor numérico de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} &= \left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}\\
&= \left(\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2^3\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^2}}}\\
&= \left(\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2^{\frac{7}{2}}}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2^{\frac{21}{4}}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{2^{\frac{8}{3}}}}\\
&= \left(\sqrt[3]{2^4\cdot 2^{\frac{7}{8}}}\right)^2\cdot 2^{\frac{21}{12}}\cdot\sqrt{2\cdot 2^{\frac{8}{12}}}\\
&= \left(\sqrt[3]{2^{\frac{39}{8}}}\right)^2\cdot 2^{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt{2^{\frac{20}{12}}}\\
&= \left(2^{\frac{13}{8}}\right)^2\cdot 2^{\frac{7}{4}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}\\
&= 2^{\frac{13}{4}}\cdot 2^{\frac{7}{4}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}\\
&= 2^5\cdot 2^{\frac{5}{6}}\\
&= 2^{\frac{35}{6}}
\end{aligned}$$