MathCon

The Mathematics Firm

Límites usando comparación de funciones

Cálculo de límites usando comparación de funciones

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Definiciones

El siguiente método lo usaremos para obtener límites de funciones de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en ciertos casos especiales.

Definición 1 *Decimos que dos funciones f, g son equivalentes en un punto x_0, si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$$

y se escribe $f \sim g$.

Ejemplos de funciones equivalentes en $x_0 = 0$

1. $\sin(x) \sim x$, si $(x \to 0)$
2. $\tan(x) \sim x$, si $(x \to 0)$
3. $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$, si $(x \to 0)$
4. $e^x - 1 \sim x$, si $(x \to 0)$
5. $\ln(1 + x) \sim x$, si $(x \to 0)$

Ejemplo de funciones equivalentes en $x_0 = \pm\infty$

a) Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n, entonces $P(x) \sim a_n x^n$, si $x \to \pm\infty$.

2
Algunas propiedades

1. Si $f \sim g$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

   Esto significa que si dos funciones son equivalentes en x_0, entonces los límites de las funciones son el mismo cuando $x \to x_0$.

2. Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

   Esto significa que la equivalencia de funciones es transitiva.

3. Si $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to x_0$, entonces $fg \sim f_1 g_1$ y $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{f_1}{g_1}$ $(x \to x_0)$.

   Esto significa que podemos usar la equivalencia de funciones sobre productos y división de funciones.

4. Si $g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces:

   $g(x) \sim \sin(g(x)) \sim \tan(g(x)) \sim \ln(1 + g(x)) \sim e^{g(x)} - 1$, en $x = x_0$.

Por lo tanto para calcular ciertos límites solo se substituye la función equivalente en el límite, de esta manera es posible calcular de forma rápida algunos límites.

3

Ejemplos

Calcular los siguientes límites

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Como la función seno es equivalente a la función x, en el cero, $\sin(x) \sim x$, entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

Como se cumplen las siguientes equivalencias: $\sin \alpha x \sim \alpha x$ y $\cos \beta x \sim \beta x$,

entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Concretamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\sin ex} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{ex} = \frac{\pi}{e}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2/3x}-1}{x}$, como $e^{g(x)}-1 \sim g(x)$, con $g(x) = 2/3x$, entonces $e^{2/3x}-1 \sim \dfrac{2}{3}x$ por lo que sustituyendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2/3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2/3x}{x} = \frac{2}{3}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x+5}{4x^3-3}$, como $3x^3+x+5 \sim 3x^3$ y $4x^3-3 \sim 4x$, cuando $x \to \infty$ entonces, sustituyendo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x+5}{4x^3-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3}{4x^3} = \dfrac{3}{4}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right)}{2x^2}$, como $\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right) \sim \tan\left(x^2+x\right) \sim x^2+x$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{2x^2} = \infty$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$, como $1-\cos x \sim x^2/2$ sustituyendo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{\sin^2 x}$ y

como $\sin^2 x \sim x^2$. Aplicamos la equivalencia del producto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{x^2}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\tan(x)}$, como $e^{\sin(x)} - 1 \sim \sin(x)$ y $\tan(x) \sim x$, sustituyendo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\tan(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\tan(x))}{x^2}$, como $1-\cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ y $\tan(x) \sim x$, sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan(x))^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{2x}$, como $\sin(3x)\sim 3x$ sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right)}{x}$, como $\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right)\sim\tan\left(e^{3x}-1\right)\sim e^{3x}-1\sim 3x$, sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(x^2\right)}{1-\cos(x)}$, como $\tan\left(x^2\right)\sim x^2$, y $1-\cos(x)\sim x^2/2$, sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\left(x^2\right)}{1-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2/2}=2$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(1-\cos x)}-1}{x^2}$ como $e^{(1-\cos x)}-1\sim(1-\cos x)\sim x^2/2$, sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(1-\cos x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}$, como $\dfrac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}=\dfrac{\sin x\sin x}{2x^2\cos x}=\dfrac{\sin x\tan x}{2x^2}$ y $\sin x\sim\tan x\sim x$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\sin x}{2x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{8x^3}$, como $\sin x-\sin x\cos x=\sin x\,(1-\cos x)$ y $\sin x\sim x$, $(1-\cos x)\sim x^2/2$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{8x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{8x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xx^2/2}{8x^3}=\dfrac{1}{16}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan(x^2)}$, como $\ln\left(\cos^2 x\right)=2\ln(\cos x)$ tenemos que $\ln(\cos x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right)$ y como $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, tenemos que $\ln(\cos x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right)$ y $\ln\left(1-\sin^2 x\right)\sim-\sin^2 x\sim -x^2$ y por otro lado $\tan x^2\sim x^2$ con $x\to 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{\tan(x^2)}=\dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.