MathCon

The Mathematics Firm

Límites usando comparación de funciones

Cálculo de límites usando comparación de funciones

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel

jjaa@math.com.mx

Contenido

1 Definiciones

El siguiente método lo usaremos para obtener límites de funciones de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en ciertos casos especiales.

Definición 1 *Decimos que dos funciones f, g son equivalentes en un punto x_0, si* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$ *y se escribe $f \sim g$.*

Ejemplos de funciones equivalentes en $x_0 = 0$

1. $\sin(x) \sim x \; (x \to 0)$
2. $\tan(x) \sim x \; (x \to 0)$
3. $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \; (x \to 0)$
4. $e^x - 1 \sim x \; (x \to 0)$
5. $\ln(1 + x) \sim x \; (x \to 0)$

Ejemplo de funciones equivalentes en $x_0 = \pm\infty$

a) Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio de grado n, entonces
$P(x) \sim a_n x^n \; (x \to \pm\infty)$

2

Algunas propiedades

1. Si $f \sim g$, y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

   Esto significa que si dos funciones son equivalentes en x_0, entonces los límites de las funciones cuando $x \to x_0$ es el mismo.

2. Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

   Esto significa que la equivalencia de funciones es transitiva.

3. Si $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ $(x \to x_0)$, entonces $fg \sim f_1 g_1$, $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{f_1}{g_1}$ $(x \to x_0)$.

   Esto significa que podemos usar (pasa) la equivalencia de funciones sobre productos de funciones y división de funciones.

4. Si $g(x) \to 0$ $(x \to x_0)$, entonces:

   $g(x) \sim \sin(g(x)) \sim \tan(g(x)) \sim \ln(1 + g(x)) \sim e^{g(x)} - 1$, en $x = x_0$.

Para el cálculo de ciertos límites solo se substituyen la función equivalente en el límite y así poder calcular de forma rápida algunos límites.

3
Ejemplos

Calcular los siguientes límites (en cada uno se aplica alguna propiedad listada antes)

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (cómo la función seno es equivalente a la función x, $\sin(x) \sim x$), entonces simplemente sustituyendo,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x}{x}$

$= 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

(cómo tenemos las siguientes equivalencias: $\sin\alpha x \sim \alpha x$ y $\cos\beta x \sim \beta x$),

entonces sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{\beta x}$

$= \dfrac{\alpha}{\beta}.$

De aquí tenemos por ejemplo que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{7x} = \dfrac{3}{7}.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{\sin ex} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi x}{ex} = \dfrac{\pi}{e}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2/3x}-1}{x}$

(cómo $e^{g(x)}-1 \sim g(x)$, con $g(x) = 2/3x$, entonces $e^{2/3x}-1 \sim \dfrac{2}{3}x,$)

por lo que sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2/3x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2/3x}{x}$

$= \dfrac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+5}{4x^3-3}$ (cómo $3x^3+x+5 \sim 3x^3$ y $4x^3-3 \sim 4x$, cuando $x \to \infty$)

entonces, sustituyendo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+5}{4x^3-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{4x^3} = \dfrac{3}{4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right)}{2x^2}$ (cómo $\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right) \sim \tan\left(x^2+x\right) \sim x^2+x$)
entonces, sustituyendo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(x^2+x\right)\right)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{2x^2} = \infty$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ (cómo $1-\cos x \sim x^2/2$) sustituyendo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{\sin^2 x}$

(y cómo $\sin^2 x \sim x^2$) (Aplicamos la equivalencia del producto) sustituyendo,

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{x^2}$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\tan(x)}$ (cómo $e^{\sin(x)}-1 \sim \sin(x)$ y $\tan(x) \sim x$) sustituyendo,

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{\tan(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\tan(x))}{x^2}$ (cómo $1-\cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ y $\tan(x) \sim x$) sustituyendo,
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan(x))^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$ (cómo $\sin(3x) \sim 3x$) sustituyendo

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right)}{x}$ (cómo $\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right) \sim \tan\left(e^{3x}-1\right) \sim e^{3x}-$ $1 \sim 3x$) sustituyendo

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\tan\left(e^{3x}-1\right)\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x} = 3$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(x^2\right)}{1-\cos(x)}$ (cómo $\tan\left(x^2\right) \sim x^2$, y $1-\cos(x) \sim x^2/2$) sustituyendo

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(x^2\right)}{1-\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2/2} = 2$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(1-\cos x)}-1}{x^2}$ (cómo $e^{(1-\cos x)}-1 \sim (1-\cos x) \sim x^2/2$) sustituyendo

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(1-\cos x)}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}$ (cómo $\dfrac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}=\dfrac{\sin x\sin x}{2x^2\cos x}=\dfrac{\sin x\tan x}{2x^2}$ y $\sin x\sim\tan x\sim x$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin x}{2x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{8x^3}$ (cómo $\sin x-\sin x\cos x=\sin x\,(1-\cos x)$ y $\sin x\sim x$, $(1-\cos x)\sim x^2/2$) entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{8x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{8x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xx^2/2}{8x^3}=\dfrac{1}{16}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan(x^2)}$ cómo $\ln\left(\cos^2 x\right)=2\ln(\cos x)$ tenemos que $\ln(\cos x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right)$ y cómo $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, tenemos que $\ln(\cos x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2 x\right)$ y cómo $\ln\left(1-\sin^2 x\right)\sim-\sin^2 x\sim -x^2$ y por otro lado $\tan x^2\sim x^2$ con $x\to 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\tan(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{\tan(x^2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$