MathCon
The Mathematics Firm

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1

Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1. Ecuaciones lineales

Definición 1 *Una ecuación lineal sobre el campo $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los $a_i, b \in \mathbb{R}$, y las x_i son indeterminadas.

Un conjunto de valores que toman las indeterminadas $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3, .., x_n = c_n$, se llama solución de la ecuación lineal si es verdadera la igualdad:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b.$$

Siempre tenemos los siguientes casos:

1. Existe una única solución.
2. No existe solución.
3. Existe más de una solución.

1.1.1. Ejemplos, ecuaciones lineales y su solución

1.1.2. La ecuación $ax = b$

1. $2x = -1$, la solución es $x = \frac{-1}{2}$, por lo tanto existe solución única.
2. $3x = 5$, nuevamente la solución es $x = \frac{5}{3}$, una vez más existe solución única.
3. La ecuación $ax = b$ tiene única solución si y sólo si $a \neq 0$, no hay solución si $a = 0$, y $b \neq 0$, hay más de una solución si $a = 0$, y $b = 0$.
4. Si $b = 0$ y $a \neq 0$, es decir $ax = 0$, tenemos la solución única cero $x = 0$, también llamada solución trivial.

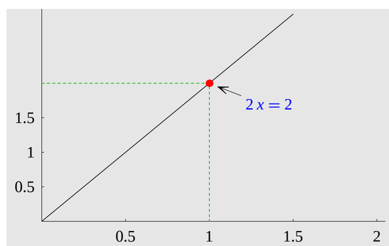

Figura 1: Función $2x$ en el valor $x = 1$

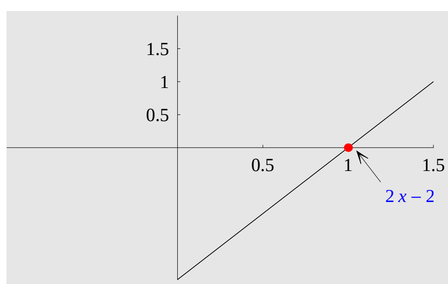

Figura 2: Función $2x - 2$ en el valor $x = 1$

1.1.3. La ecuación $ax + by = c$

1. Si a ó b es cero regresamos al caso anterior.
2. Un ejemplo: $x + y = 1$, en este caso tenemos una infinidad de soluciones, las soluciones se encuentran asignando un valor a una variable, ya sea x o y, posteriormente se despeja la otra variable. Sea $y = r$, entonces $x = 1 - r$, por lo tanto el conjunto solución es:
$$\{(1 - r, r) | r \in \mathbb{R}\}$$
3. Otro ejemplo: $2x - 3y = 2$, entonces si $y = r$ tenemos $x = \dfrac{2 + 3r}{2}$. Por lo tanto el conjunto solución es:
$$\{(\frac{2 + 3r}{2}, r) | r \in \mathbb{R}\}$$
4. En este caso ($ax + by = c$) tenemos una ecuación y dos variables, la resta $2 - 1$ nos da el número de variables a las que podemos asignarles un valor arbitrario r. A esta variable le llamaremos variable libre.
5. Si $a = b = 0$, y $c \neq 0$, la ecuación no tiene solución.
6. De nuevo si $c = 0$, entonces la ecuación siempre tiene la solución $x = y = 0$, (la solución trivial).
7. Si $a \neq 0, b \neq 0$ entonces la ecuación $ax + by = 0$ tiene más de una solución que se obtienen, primero asignando $y = r$ y entonces $x = \dfrac{-br}{a}$, entonces el conjunto solución es:
$$\{(\frac{-br}{a}, r) | r \in \mathbb{R}\}$$

1.1.4. La ecuación $ax + by + cz = d$

1. Esta ecuación tiene 2 variables libres, por ejemplo z, y, si asignamos valores arbitrarios a ellas $z = r, y = s$ tenemos que el conjunto solución es $(\frac{d-(bs+cr)}{a}, s, r)$.
2. Si $d = 0$, entonces la ecuación siempre tiene una solución $x = y = z = 0$, la solución trivial. Las otras son $(\frac{bs+cr}{a}, s, r)$.

Definición 2 *Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es el siguiente arreglo:*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde las constantes $a_{11}, .., a_{1n}, a_{12}, ...a_{2n}, .., a_{m1}, .., a_{mn}, b_1, .., b_m \in \mathbb{R}$, y las incógnitas $x_1, .., x_n$ representan también números reales.

Ejemplos:

1.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ -4x_1 + 8x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

2.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 5 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 & = & 9 \end{array}$$

Es un sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas.

Definición 3 *Una solución de un sistema de ecuaciones, es un conjunto de valores que toman las incógnitas* $x_1, .., x_n$ *y dan como resultado que todas las igualdades del sistema de ecuaciones son verdaderas.*

1.2. Sistemas de ecuaciones 2×2

Los sistemas de ecuaciones más simples son los que cuentan con 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

Geométricamente, puede interpretarse a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas como dos líneas rectas, entonces:

1. El sistema tiene una única solución si las rectas se intersectan en un sólo punto.
2. No tiene solución, si las rectas son paralelas.
3. Tiene más de una solución (una cantidad infinita) si las rectas son la misma .

1.2.1. Ejemplos de sistemas 2×2

1. Considere el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

   El sistema es equivalente a las dos rectas:

$$\begin{aligned} y &= 1 - x \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

   La solución es la intersección de las dos rectas, que podemos observar en la figura 3.

2. Ahora, sea el sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

El sistema es equivalente a las dos rectas:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

En este caso las dos rectas son paralelas, entonces el sistema no tiene solución, figura 4.

3. Otro ejemplo más:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

El sistema es equivalente a las dos rectas:

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= \frac{1}{2}(2x + 2) \end{aligned}$$

En este caso las dos rectas son la misma, por lo tanto el sistema tiene una infinidad de soluciones, figura 5.

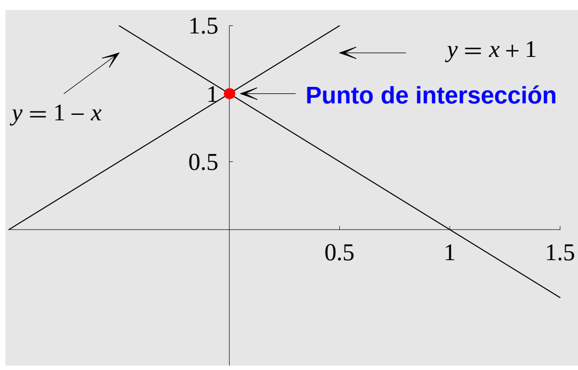

Figura 3: Las rectas $y = x + 1, y = 1 - x$ y su punto de intersección

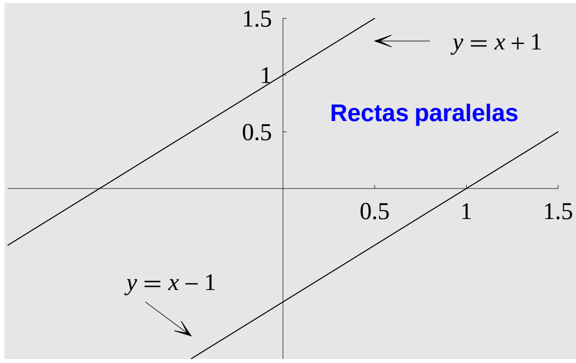

Figura 4: Las rectas $y = x + 1, y = x - 1$, son paralelas

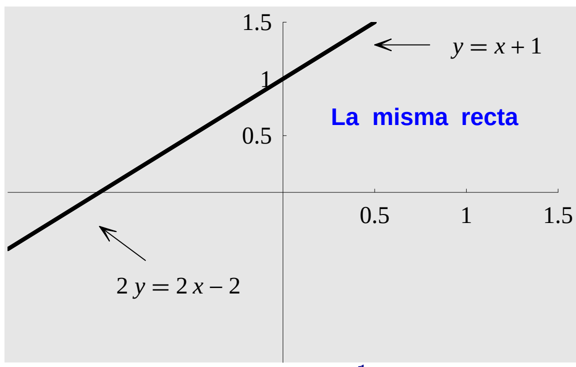

Figura 5: Las rectas $y = x + 1, y = \frac{1}{2}(2x - 2)$, son la misma

1.2.2. Solución de un sistema de ecuaciones

Definición 4 *Dos sistemas de ecuaciones lineales se llaman equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Geométricamente puede verse que un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas son dos líneas rectas, y en el caso de que haya una única solución, las dos rectas se intersectan en un punto (x_0, y_0). Entonces otro sistema de ecuaciones lineales que tenga el mismo conjunto de soluciones que el anterior, serán otras dos líneas rectas que se intersecten en el mismo punto (x_0, y_0). De hecho hay en este caso una cantidad infinita de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Por ejemplo el sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Tiene como solución el punto $(1,1)$, figura 6. El sistema:

$$\begin{aligned} x/2 - y &= -1/2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

tiene como solución también el punto $(1,1)$, figura 7. Es decir, los dos sistemas tienen la misma solución, por lo tanto son sistemas equivalentes. Más aún podemos generar cualquier otro sistema con la misma solución, a partir de la fórmula $y - 1 = m(x-1)$, figura 8.

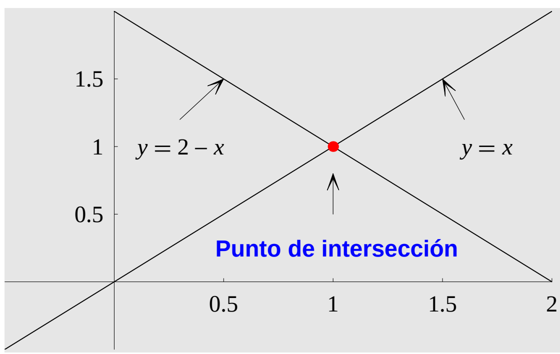

Figura 6: Las rectas del sistema $x - y = 0$, $x - y = 2$

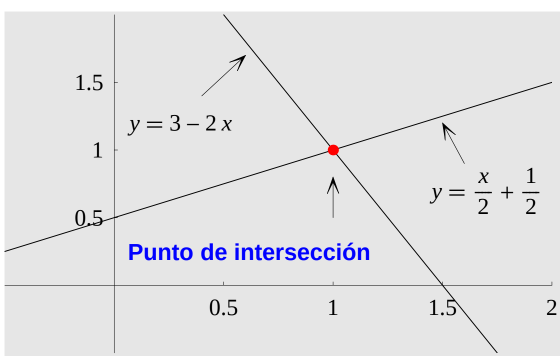

Figura 7: Las rectas del sistema $x/2 - y = -1/2$, $2x + y = 3$

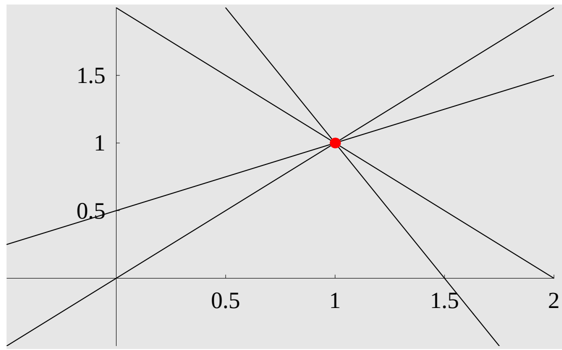

Figura 8: Sistemas Equivalentes

Observación 1 *La estrategia para resolver sistemas de ecuaciones lineales difíciles, es transformarlo a otro SEL que sea equivalente, pero que sea más fácil de resolver.*

Para poder transformar un SEL a otro equivalente, basta aplicar algunas operaciones sobre las filas del SEL llamadas “operaciones elementales".

1.2.3. Operaciones elementales sobre sistemas de ecuaciones:

Las operaciones elementales sobre sistemas de ecuaciones son:

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

Proposición 1 *Un sistema de ecuaciones lineales A que se obtiene de otro B por medio de operaciones elementales, entonces A y B son equivalentes, es decir tienen el mismo conjunto de soluciones.*

Ejercicios: encontrar la solución del siguiente SEL, aplicando operaciones elementales sobre filas de ecuaciones:

Ejercicio 1 Resolver el siguiente SEL:

$$\begin{array}{rcccl} E_1: & 2x & + & y & = & 1 \\ E_2: & 3x & - & y & = & 2 \end{array}$$

Paso 1 Se aplica la siguiente OE sobre E_2: $E_2 \to -3E_1 + 2E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -3E_1 & : & -6x - 3y & = & -3 \\ 2E_2 & : & 6x - 2y & = & 4 \\ \hline E_2 & : & -5y & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array} \cong \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ & & -5y & = & 1 \end{array}$$

Paso 2 Obtenemos el valor $y = -1/5$ de la nueva E_2.

Paso 3 Se obtiene el valor $x = 3/5$ de E_1.

Ejercicio 2 Observemos que sucede si aplicamos otra operación elemental al mismo SEL:

$$\begin{array}{rcccl} E_1: & 2x & + & y & = & 1 \\ E_2: & 3x & - & y & = & 2 \end{array}$$

Paso 1 Apliquemos la siguiente OE sobre E_2: $E_2 \to -3/2E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -3/2E_1 & : & -3x - 3/2y & = & -3/2 \\ E_2 & : & 3x - y & = & 2 \\ \hline E_2 & : & -5/2y & = & 1/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array} \cong \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ & & -5/2y & = & 1/2 \end{array}$$

Paso 2 Obtenemos el valor $y = -1/5$ de la nueva E_2.

Paso 3 Ahora despejamos $x = 3/5$ de E_1.

En ambos casos llegamos a la misma solución.

Ejercicio 3 Resolver el SEL siguiente:

$$\begin{array}{lrcrcr} E_1: & x & + & 2y & = & 8 \\ E_2: & 3x & - & 4y & = & 4 \end{array}$$

Paso 1 Se aplica la siguiente OE sobre E_2: $E_2 \to -3E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -3E_1 & : & -3x - 6y & = & -24 \\ E_2 & : & 3x - 4y & = & 4 \\ \hline E_2 & : & -10y & = & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 8 \\ 3x & - & 4y & = & 4 \end{array} \cong \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 8 \\ & & -10y & = & -20 \end{array}$$

Paso 2 Obtenemos $y = 2$ de E_2.

Paso 3 Despejamos a $x = 4$ de E_1.

Ejercicio 4 Resolver el SEL siguiente:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} E_1: & 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ E_2: & 3x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ E_3: & 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array}$$

Paso 1 Se aplica una OE sobre E_2: $E_2 \to -3E_1 + 2E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -3E_1 & : & -6x - 3y + 9z & = & -15 \\ 2E_2 & : & 6x - 2y + 4z & = & 10 \\ \hline E_2 & : & -5y + 13z & = & -5 \end{array}$$

Paso 2 Ahora se aplica la siguiente OE sobre E_3: $E_3 \to -5E_1 + 2E_3$

$$\begin{array}{rcrcr} -5E_1 & : & -10x - 5y + 15z & = & -25 \\ 2E_3 & : & 10x - 6y - 2z & = & 32 \\ \hline E_3 & : & -11y + 13z & = & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 16 \end{array} \cong \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ & & -5y & + & 13z & = & -5 \\ & & -11y & + & 13z & = & 7 \end{array}$$

Después de aplicar las anteriores operaciones el SEL queda de la siguiente manera, habiendo hecho ceros en los lugares de color rojo:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ \blacksquare & & -5y & + & 13z & = & -5 \\ \blacksquare & & -11y & + & 13z & = & 7 \end{array}$$

Paso 3 Ahora aplicamos la siguiente OE a E_3: $E_3 \rightarrow -E_2 + E_3$

$$\begin{array}{rcrcr} -E_2 & : & 5y - 13z & = & 5 \\ E_3 & : & -11y + 13z & = & 7 \\ \hline E_3 & : & -6y & = & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ & & -7y & + & 13z & = & -5 \\ & & -11y & + & 13z & = & 7 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ & & -5y & + & 13z & = & -5 \\ & & -6y & + & & = & 12 \end{array}$$

Después de aplicar la anterior operación el SEL queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccccc} E_1: & 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ E_2: & \blacksquare & & -5y & + & 13z & = & -5 \\ E_3: & \blacksquare & & -6y & + & \blacksquare & = & 12 \end{array}$$

Paso 4 Obtenemos el valor $y = -2$ de E_3.

Paso 5 El valor $z = \frac{-15}{13}$ de E_2.

Paso 6 Y el valor $x = \frac{23}{13}$ de E_1.

Ejercicio 5 Resolver el SEL:

$$\begin{array}{cccccccc} E_1: & 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ E_2: & 4x & + & 5y & + & 6z & = & 24 \\ E_3: & 3x & + & y & - & 2z & = & 4 \end{array}$$

Paso 1 Se aplica una OE sobre E_2: $E_2 \rightarrow -2E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -2E_1 & : & -4x - 8y - 12z & = & -36 \\ E_2 & : & 4x + 5y + 6z & = & 24 \\ \hline E_2 & : & -3y - 6z & = & -12 \end{array}$$

Paso 2 Se aplica otra OE sobre E_2: $E_2 \rightarrow -1/3E_2$

$$-1/3E_2 \quad : \quad y + 2z \quad = \quad 4$$

Paso 3 Ahora se aplica la siguiente OE sobre E_3: $E_3 \to -3E_1 + 2E_3$

$$\begin{array}{rcrcr}
-3E_1 & : & -6x - 12y - 18z & = & -54 \\
2E_3 & : & 6x + 2y - 4z & = & 8 \\
\hline
E_3 & : & -10y - 22z & = & -46
\end{array}$$

Paso 4 Se aplica otra OE sobre E_3: $E_3 \to -1/2E_3$

$$\begin{array}{rcrcr}
-1/2E_3 & : & 5y + 11z & = & 23
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
4x & + & 5y & + & 6z & = & 24 \\
3x & + & y & - & 2z & = & 4
\end{array}
\cong
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
 & & y & + & 2z & = & 4 \\
 & & 5y & + & 11z & = & 23
\end{array}$$

El sistema equivalente queda de la siguiente forma, después de hacer ceros en los lugares de rojo.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
 & & y & + & 2z & = & 4 \\
 & & 5y & + & 11z & = & 23
\end{array}$$

Paso 5 Se aplica la siguiente OE a E_3: $E_3 \to -5E_2 + E_3$

$$\begin{array}{rcrcr}
-5E_2 & : & -5y - 10z & = & -20 \\
E_3 & : & 5y + 11z & = & 23 \\
\hline
E_3 & : & z & = & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
 & & y & + & 2z & = & 4 \\
 & & 5y & + & 11z & = & 23
\end{array}
\cong
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
 & & y & + & 2z & = & 4 \\
 & & & & z & = & 3
\end{array}$$

El sistema finalmente queda de la siguiente forma.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\
 & & y & + & 2z & = & 4 \\
 & & & & z & = & 3
\end{array}$$

Paso 6 Obtenemos el valor $z = 3$ de E_3.

Paso 7 Obtenemos el valor $y = -2$ de E_2.

Paso 8 Obtenemos el valor $x = 4$ de E_1.

1.3. Método de eliminación de Gauss

Método 1 *El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones A, a otro B, aplicando operaciones elementales, de tal forma que B queda en una forma triangular y por lo tanto puede ser resuelto con despejes sucesivos simples.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & & a'_{33}x_3 & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & a'_{mn}x_m & = & b'_m
\end{array}$$

Como se sabe un SEL puede tener una única solución, puede no tener soluciones, o tener más de una solución. El Método de Gauss nos permite saber en cual de estos casos está un SEL.

1. En el caso de obtener un SEL equivalente al original, donde tengamos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y podamos despejar a todas las incógnitas. Entonces el sistema tiene una única solución.

2. En el caso de obtener un SEL equivalente al original, donde obtengamos una contradicción, es decir, una ecuación falsa. Entonces el sistema no tiene solución.

3. En caso de obtener un SEL equivalente al original, donde obtengamos más incógnitas que ecuaciones. Entonces el sistema tiene más de una solución. La resta de variables menos el de ecuaciones se llama número de variables libres.

1.3.1. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Método 2 *El método de Gauss-Jordan consiste en transformar un sistema de ecuaciones A, a otro B, por medio de operaciones elementales, de tal forma que B queda en forma diagonal y por lo tanto la solución queda de manera directa.*

$$
\begin{array}{ccccccc}
a'_{11}x_1 & & & & & = & b'_1 \\
& a'_{22}x_2 & & & & = & b'_2 \\
& & a'_{33}x_3 & & & = & b'_3 \\
& & & & & \vdots & \\
& & & & a'_{mn}x_m & = & b'_m
\end{array}
$$

Ejemplos:

Ejercicio 6 Continuando con el ejercicio 1, hasta aplicar el método completo Gauss-Jordan.

Paso 1 Del ejercicio 1 sabemos que:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ \blacksquare & & -5y & = & 1 \end{array}$$

Paso 2 Ahora hacemos ceros cambiando: $E_1 \to E_2 + 5E_1$

$$\begin{array}{rcrcr} E_2 & : & -5y & = & 1 \\ 5E_1 & : & 10x + 5y & = & 5 \\ \hline E_1 & : & 10x & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{rcrcr} 10x & & \blacksquare & = & 6 \\ \blacksquare & - & 5y & = & 1 \end{array}$$

Paso 3 Obtenemos directamente $x = 3/5$ de E_1.

Paso 4 Obtenemos $y = -1/5$ de E_2.

Ejercicio 7 Hacemos lo mismo con el ejercicio 5, hasta aplicar el método completo Gauss-Jordan.

Paso 1 Del ejercicio 5 sabemos que:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & 5y & + & 11z & = & 23 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ \blacksquare & & y & + & 2z & = & 4 \\ \blacksquare & & \blacksquare & & z & = & 3 \end{array}$$

Paso 2 Continuamos haciendo ceros cambiando: $E_2 \to -2E_3 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcr} -2E_3 & : & -2z & = & -6 \\ E_2 & : & y + 2z & = & 4 \\ \hline E_2 & : & y & = & -2 \end{array}$$

$E_1 \to -6E_3 + E_1$

$$\begin{array}{rcrcr} -6E_3 & : & -6z & = & -18 \\ E_1 & : & 2x+4y+6z & = & 18 \\ \hline E_1 & : & 2x+4y & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & 5y & + & 11z & = & 23 \end{array} \cong \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & & \blacksquare & = & 0 \\ \blacksquare & & y & & \blacksquare & = & -2 \\ \blacksquare & & \blacksquare & & z & = & 3 \end{array}$$

Paso 3 Seguimos haciendo ceros: $E_1 \to -4E_2 + E_1$

$$\begin{array}{rcrcr} -4E_2 & : & -4y & = & 8 \\ E_1 & : & 2x+4y & = & 0 \\ \hline E_1 & : & 2x & = & 8 \end{array}$$

Paso 4 Obtenemos finalmente:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & 5y & + & 11z & = & 23 \end{array} \cong \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & \blacksquare & & \blacksquare & = & 8 \\ \blacksquare & & y & & \blacksquare & = & -2 \\ \blacksquare & & \blacksquare & & z & = & 3 \end{array}$$

De donde $x = 4, y = -2, z = 3$ de acuerdo al ejemplo 5.

1.4. Sistemas Homogéneos

Son de especial interés los sistemas de ecuaciones donde $b_1 = \cdots = b_n = 0$. A estos sistemas les llamaremos sistemas homogéneos.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Observación 2 *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (SELH), SIEMPRE tiene la solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Llamada solución trivial.*

En este caso, entonces el sistema ó tiene sólo la solución trivial ó tiene más de una solución.

Aplicando el método de Gauss el SELH tiene otras soluciones además de la trivial, sí obtenemos más incógnitas que ecuaciones.

Ejercicio 8 Apliquemos el método de Gauss al siguiente SELH.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 4y & = & 0 \end{array}$$

Paso 1 Aplicando la OE. $E_2 \to -3E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcl} -3E_1 & : & -3x - 6y & = & 0 \\ E_2 & : & 3x + 4y & = & 0 \\ \hline E_2 & : & -2y & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 4y & = & 0 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array}$$

Paso 2 Se obtiene directamente que el SELH tiene una única solución, y es la trivial.

Ejercicio 9 Resolver el siguiente SELH.

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array}$$

Paso 1 Aplicando la OE. $E_2 \to -2E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcl} -2E_1 & : & -2x + 2y & = & 0 \\ E_2 & : & 2x - 2y & = & 0 \\ \hline E_2 & : & 0 & = & 0 \end{array}$$

Como obtenemos una igualdad que es siempre verdadera, por lo tanto se cumple para todo x, y, la podemos quitar. Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \end{array}$$

Es decir, tenemos una ecuación con dos variables, entonces tenemos una variable libre.

Paso 2 En este caso podemos asignar un valor a una variable, digamos $y = a$.

Ejercicio 10 Resolver el siguiente SELH.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z = & 0 \\ x & - & y & - & z = & 0 \end{array}$$

Paso 1 Aplicando la OE. $E_2 \to -E_1 + E_2$

$$\begin{array}{rcrcl} -E_1 & : & -x-y-z & = & 0 \\ E_2 & : & x-y-z & = & 0 \\ \hline E_2 & : & -2y-2z & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z = & 0 \\ x & - & y & - & z = & 0 \end{array} \cong \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z = & 0 \\ & - & 2y & - & 2z = & 0 \end{array}$$

Paso 2 Aplicando la OE. $E_2 \to E_2/2$

$$E_2/2 \quad : \quad -x-y \quad = \quad 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z = & 0 \\ x & - & y & - & z = & 0 \end{array} \cong \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z = & 0 \\ & - & y & - & z = & 0 \end{array}$$

Paso 3 Por lo tanto de obtenemos que $y = -z$, y sustituyendo en la Ec. 1, tenemos que $x = 0$. Así el conjunto solución se escribe como $\{(0, y, -y)\}|y \in \mathbb{R}$