MathCon

The Mathematics Firm

Funciones 1

Ejercicios básicos sobre funciones

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1 Introducción

Los aspectos básicos a estudiar sobre funciones son:

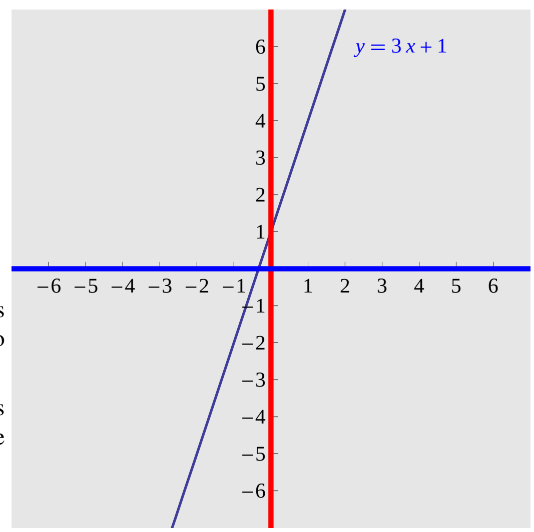
1. Obtención del dominio natural.
2. Obtención de la imagen de conjuntos.
3. Obtención de la imagen inversa de conjuntos.
4. Verificar si la función es inyectiva.
5. Verificar si la función es sobre.
6. Obtención de la función inversa.

2 Ejercicios

Observación: *se suele llamar dominio natural de una función, al conjunto de números reales donde la regla de correspondencia esta definida en los reales. Se suele llamar contradominio natural, a la imagen del dominio natural, también llamado rango o recorrido.*

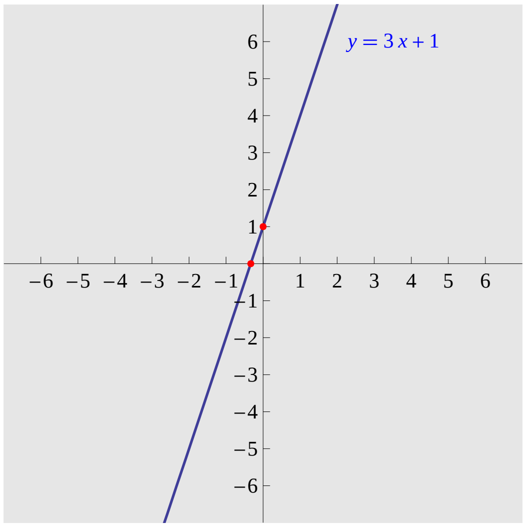
Ejercicio 1 *Estudiar la función:*

$$y = 3x + 1$$



La función $y = 3x + 1$

1. El dominio natural de la función es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, ya que $3x + 1$ siempre da un número real y.
2. El rango, o imagen del dominio natural son todos los reales, ya que para todo real $y \in \mathbb{R}$ existe un x tal que $f(x) = y = 3x + 1$.



Intersección con los ejes

1. Si $x = 0$, entonces $y = 1$, entonces la gráfica de la recta se intersecta (interseca, según RAE, Real Academia Española) con el eje y en $(0, 1)$.
2. Si $0 = 3x + 1$, entonces $x = -\frac{1}{3}$, y la gráfica intersecta al eje x en $(-\frac{1}{3}, 0)$. El punto donde la gráfica de la función intersecta al eje x se le llama raíz de la función.

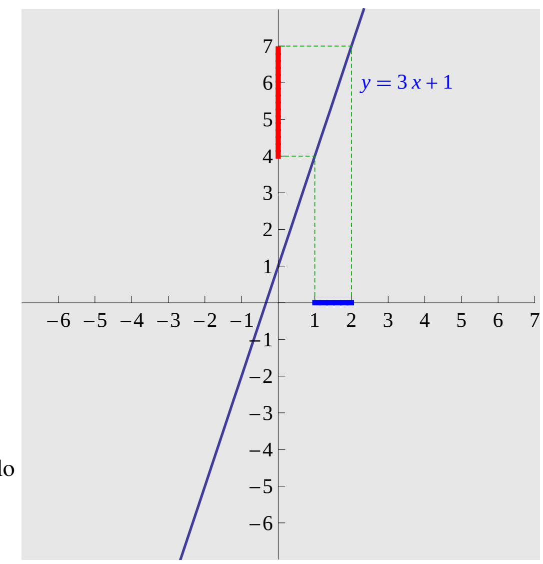


Imagen e imagen inversa:

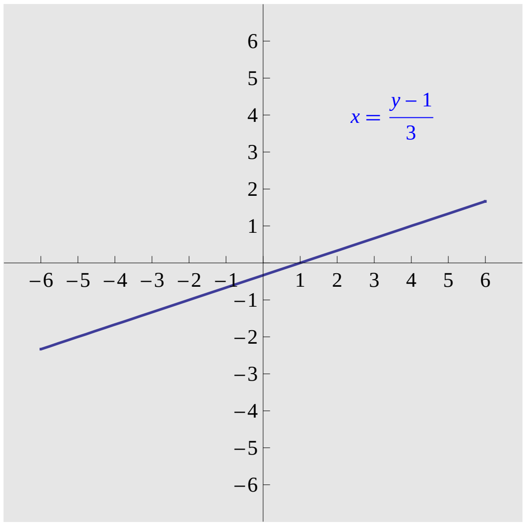
1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[4, 7]$.
2. La imagen inversa del intervalo $[4, 7]$ es el intervalo $[1, 2]$.

Inyectividad

La función $y = 3x+1$, es inyectiva (en $\mathbb{R}$) si puntos $x_1 \neq x_2$ tienen imagenes diferentes, ó si imagenes iguales provienen de puntos x_s iguales. En nuestro caso, si $y_1 = y_2$, entonces $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$, o sea $3x_1 = 3x_2$, y así $x_1 = x_2$. Por lo tanto la función es inyectiva.

Sobreyectividad

La función es sobre si $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ existe x_0 tal que $f(x_0) = y_0$, en nuestro caso, dado y_0 entonces $x_0 = (y_0 - 1)/3$.

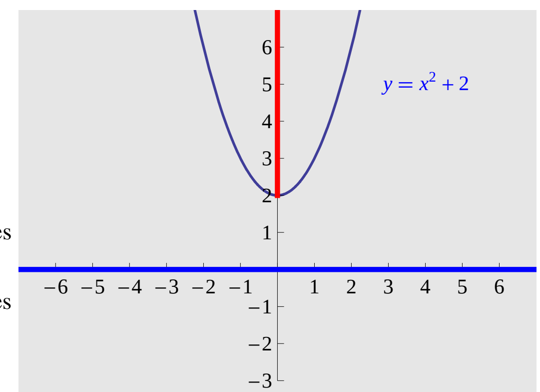


Función inversa

1. Como la función es biyectiva en todo $\mathbb{R}$, entonces existe la función inversa en todo $\mathbb{R}$.
2. La función inversa se obtiene despejando a x de la ecuación $y = 3x + 1$, donde $x = \dfrac{y-1}{3}$.

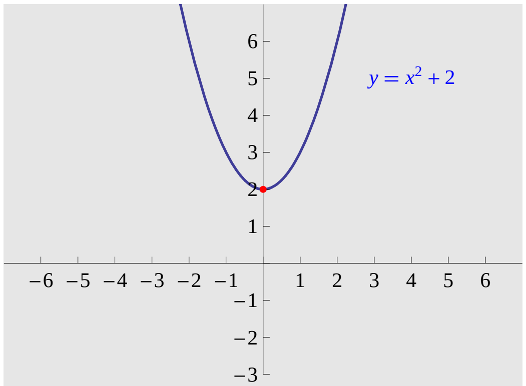
Ejercicio 2 *Estudiar la función:*

$$y = x^2 + 2$$



La función $y = x^2 + 2$

1. El dominio natural de la función son los números reales $\mathbb{R}$, ya que $x^2 + 2$ siempre da un número real y.
2. El rango, o imagen del dominio natural en este caso es el intervalo $[2, \infty)$



Intersección con los ejes

1. Si $x = 0$, entonces $y = 2$, entonces la gráfica de la recta se intersecta (interseca, según RAE) con el eje y en $(0, 2)$.
2. Si $0 = x^2 + 2$, pero no existe un número real que cumpla esta condición por lo tanto, como se observa en la figura, la gráfica no intersecta al eje x. La función no tiene raíces reales.

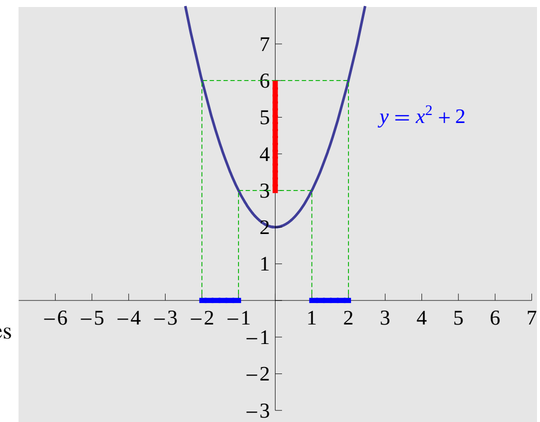


Imagen e imagen inversa:

1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[3, 6]$.
2. En este caso la imagen inversa del intervalo $[3, 6]$ es $[-1, -2] \bigcup [2, 1]$.

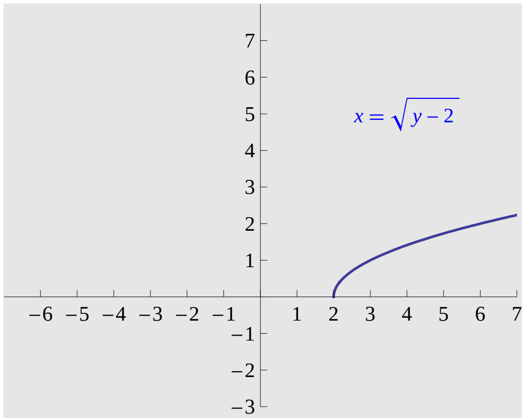
Inyectividad

La función $y = x^2 + 2$, no es inyectiva, ya que existen al menos dos puntos $x_1 \neq x_2$ que tienen imagenes iguales, por ejemplo $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ambos tienen como imagen al 3.

Sobreyectividad

La función no es sobre ya que para $y = 0$ no existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Es decir la ecuación $0 = x^2 + 2$ no tiene soluciones reales.

Función inversa Como la función no es biyectiva en todo $\mathbb{R}$, entonces no existe la función inversa en todo $\mathbb{R}$.

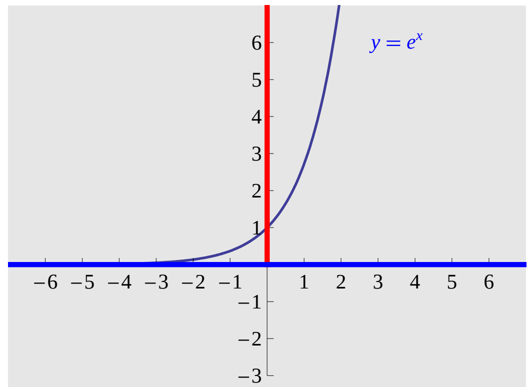


Función inversa

1. Si consideramos a la función sólo con dominio $[0, \infty)$, entonces la función si es inyectiva, y por lo tanto tiene inversa.
2. La función inversa de $y = x^2 + 2$, es $x = \sqrt{y-2}$.

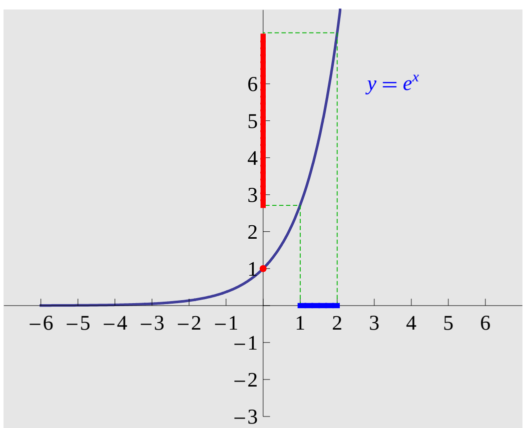
Ejercicio 3 *Estudiar la función:*

$$y = e^x$$



La función e^x

1. El dominio de la función e^x es el conjunto de todos los números reales.
2. La imagen del dominio natural, o el rango de la función e^x es el intervalo $(0, \infty)$.

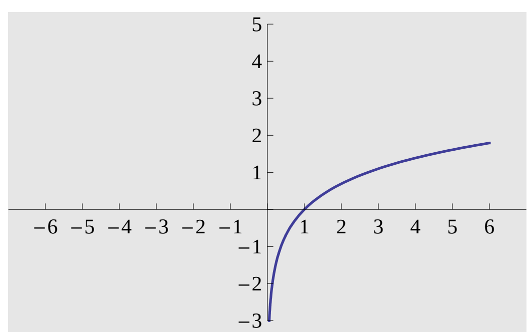


Intersección con ejes, imagen e imagen inversa

1. La función $y = e^x$ no se intersecta con el eje x, pero si se intersecta con el eje y en $(0, e)$.
2. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[e, e^2] = [2{,}7182, 7{,}3890]$.
3. La imagen inversa del intervalo $[e, e^2]$, es el intervalo $[1, 2]$.

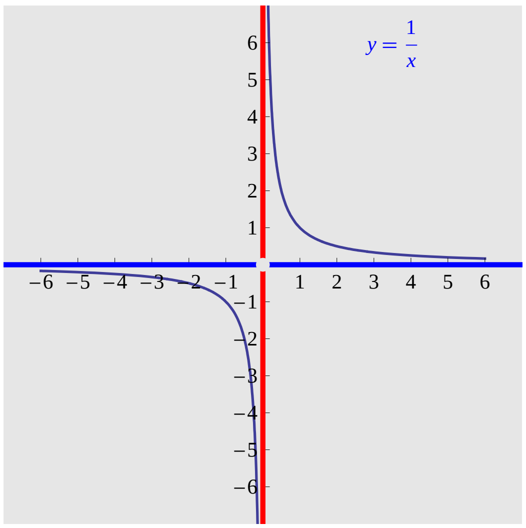
La función inversa de e^x

1. La función $y = e^x$ es biyectiva como $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$..
2. La función inversa de $y = e^x$, se llama función logaritmo, $x = \ln(y)$, con gráfica a la derecha.



Ejercicio 4 *Estudiar la función:*

$$y = \frac{1}{x}$$



La función $\frac{1}{x}$

1. El dominio natural de la función $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. El rango de la función $\frac{1}{x}$ es también $\mathbb{R} - \{0\}$.

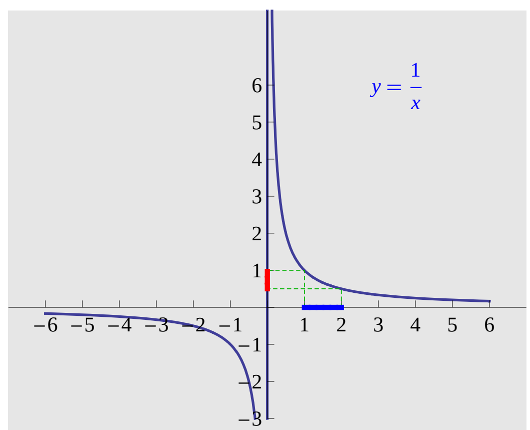


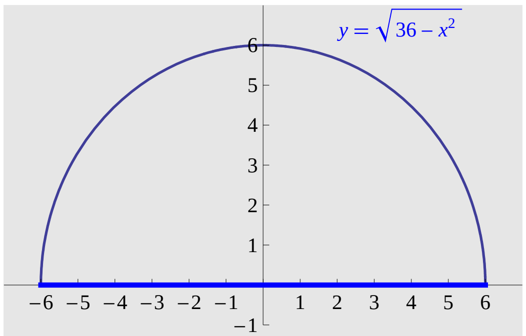
Imagen y imagen inversa

1. La imagen del intervalo $[1, 2]$ es el intervalo $[1/2, 1]$.
2. La imagen inversa del intervalo $[1/2, 1]$ es el intervalo $[1, 2]$.

Función inversa La función es biyectiva en $\mathbb{R} - \{0\}$, donde la función inversa es $x = \frac{1}{y}$.

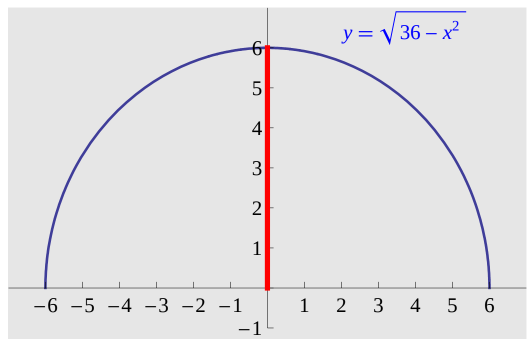
Ejercicio 5 *Estudiar la función:*

$$y = \sqrt{36 - x^2}$$



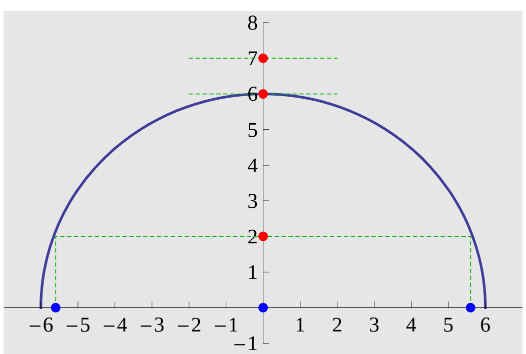
Dominio

1. El dominio de $f(x) = y = \sqrt{36 - x^2}$, es el conjunto de números reales x_s, tales que $36 - x^2 \geq 0$, es decir donde existe una raíz cuadrada real.
2. Resolviendo la desigualdad, $36 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq 6$, es decir $|x| \leq 6$, entonces el dominio es $-6 \leq x \leq 6$ ó escrito como intervalo $[-6, 6]$.



Rango

1. La imagen del dominio(rango) es el conjunto de y_s tales $\exists x$ con $f(x) = y$, en este caso $f(x) = f(-x)$, y si $-6 \leq x \leq 6$, entonces $0 \leq y \leq 6$.



Imagenes inversas

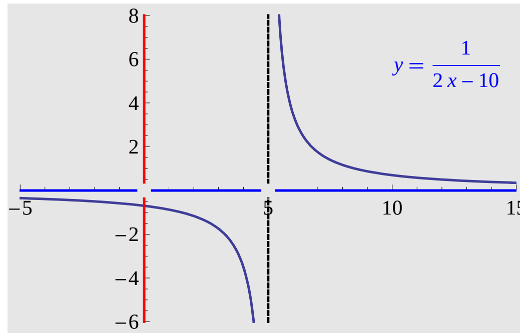
1. $f^{-1}(2) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 2\}$, $2 = \sqrt{36 - x^2}$, por lo tanto $x = \pm\sqrt{32}$, $f^{-1}(2) = \{-\sqrt{32}, \sqrt{32}\}$.
2. $f^{-1}(6) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 6\}$, $6 = \sqrt{36 - x^2}$, por lo tanto $x = 0$, $f^{-1}(6) = \{0\}$.
3. $f^{-1}(6) = \{x \in D_{f(x)} | f(x) = 7\}$, $7 = \sqrt{36 - x^2}$, $f^{-1}(7) = \emptyset$.

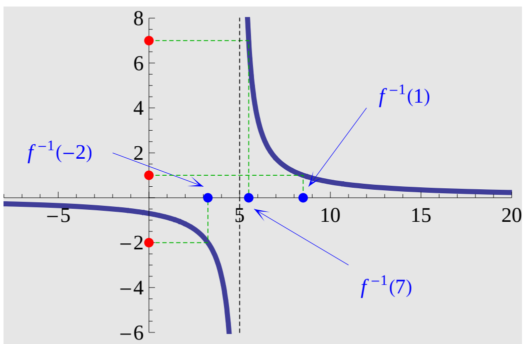
Ejercicio 6 *Estudiar la función:*

$$y = \frac{7}{2x - 10}$$

Dominio de la función

1. El dominio (natural) de la función es el conjunto de números reales, tales que $2x-10 \neq 0$, es decir $\mathbb{R} - \{5\}$.
2. La imagen del dominio es el conjunto de y_s tales que $y = \dfrac{7}{2x-10}$ recorriendo $x \in \mathbb{R} - \{5\}$. Dado y, entonces $x = \dfrac{7}{2y} + 5$, se puede calcular excepto para $y = 0$, por lo tanto el rango es $\mathbb{R} - \{0\}$.



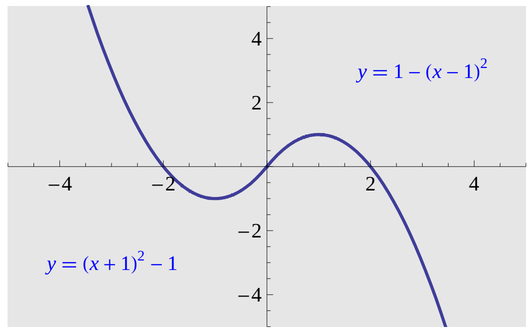


Imagenes inversas

1. $f^{-1}(7)$, $7 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.
2. $f^{-1}(1)$, $1 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{17}{2} = 8{,}5$.
3. $f^{-1}(-2)$, $-2 = \dfrac{7}{2x-10}$, por lo tanto $x = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$.

Ejercicio 7 *Estudiar la función:*

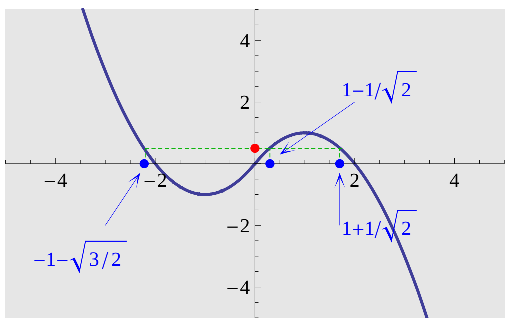
$$y = \begin{cases} -(x-1)^2+1 & si\ x>0 \\ (x+1)^2-1 & si\ x \le 0 \end{cases}$$



Dominio de la función

1. El dominio (natural) de la función es el conjunto de números reales, tales que: $y = \begin{cases} -(x-1)^2+1 & \text{si } x>0 \\ (x+1)^2-1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ es real, pero es el caso donde el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Imagenes inversas



$f^{-1}(1/2)$ La imagen inversa de $1/2$, es el conjunto $\{x \in D_{f(x)} | f(x) = 1/2\}$

Si $x > 0$ *a*) $1/2 = -(x-1)^2+1$, entonces, $x = \dfrac{1}{\pm\sqrt{2}} + 1$.

b) $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 \sim 1{,}7071$.

c) $x_2 = \dfrac{1}{-\sqrt{2}} + 1 \sim 0{,}2929$.

Si $x \le 0$ *a*) $1/2 = (x+1)^2 - 1$, entonces, $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1$.

b) solo la parte negativa $x_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1 \sim -2{,}22$.

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(1/2) = \{\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1, \dfrac{1}{-\sqrt{2}} + 1, -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\}$