MathCon

The Mathematics Firm

Límites

Problemas básicos de límites

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1 Límites

Los límites de funciones son una de las partes más complicadas del análisis de funciones. En este reporte presentamos de manera simple algunos de los ejemplos más sencillos para el cálculo de límites.

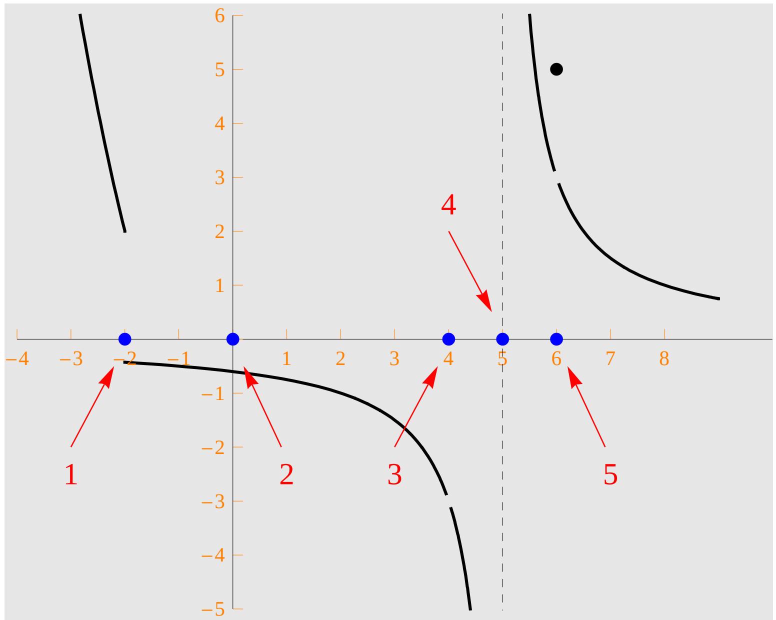
El límite de una función se denota como $\lim_{x \to c} f(x) = b$. La idea general de límite es saber adónde se aproxima la función $f(x)$ cuando x se aproxima a c. Si la función se aproxima a un número real b único, entonces decimos que el límite existe, en otro caso decimos que no existe.

En el siguiente ejemplo observamos algunos de los casos más sencillos sobre límites.

Sea la función $f(x)$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ si } x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-5}, \text{ si } 2 < x < 4 \\ \dfrac{3}{x-5}, \text{ si } 4 < x < \infty \\ 5, \text{ si } x = 6 \end{cases}$$

Es decir, la función no esta definida en $x = 4$, la gráfica de esta función se muestra a continuación.



Punto 1 En el punto $x = -2$ de la gráfica de la función, observamos que si nos aproximamos al -2 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a 2. Pero si nos aproximamos a -2 por arriba (por la derecha) la función se aproxima a $-0{,}4$. Por lo tanto $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

Punto 2 En el punto $x = 0$ de la gráfica de la función, observamos que si nos aproximamos al 0 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a $-0{,}6$. Si nos aproximamos a 0 por arriba (por la derecha) la función se aproxima también a $-0{,}6$. Por lo tanto $\lim_{x \to -2} f(x) = 0{,}6$.

Punto 3 En el punto 3, $x = 4$ aunque la función no esta definida, si nos acercamos a 4 por abajo (por la izquierda), la función se acerca a -3, si nos acercamos a $x = 4$ por arriba (por la derecha), la función también se acerca a $y = -3$. Entonces el límite existe y $\lim_{x \to 4} f(x) = -3$.

Punto 4 En el punto 4, $x = 5$ si nos acercamos a 4 por abajo (por la izquierda), la función se va a $-\infty$, si nos acercamos a $x = 5$ por arriba (por la derecha), la función va a ∞. Entonces el límite no existe.

Punto 5 En el punto 5, $x = 6$ aunque la función esta definida y vale 5. Si nos acercamos a 6 por abajo (por la izquierda), la función se va a 3, si nos acercamos a $x = 6$ por arriba (por la derecha), la función se acerca a 3. Entonces $\lim_{x \to 6} f(x) = 3$.

2

Límites con $\epsilon - \delta$

Ejercicio 1 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to 5} x = 5.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, cuando $|x - c| = |x - 5| < \delta$. En este caso $|f(x) - L| = |x - 5| < \delta$, entonces si $\delta = \epsilon$, obtenemos que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Paso 2 Esto puede apreciarse mejor en la figura 1.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon$, como $|x - c| = |x - 5| < \delta$ es cierto, entonces si $\delta = \epsilon$, también es cierto que $|x - 5| = |f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

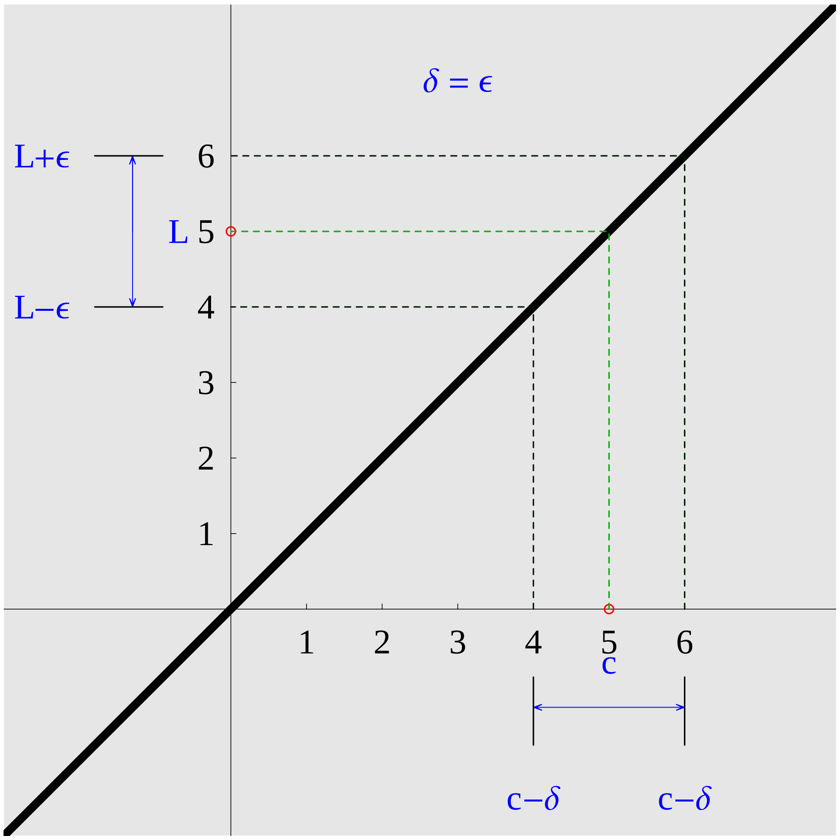


Figura 2.1: $f(x) = x, c = 5, L = 5$.

Ejercicio 2 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*
$$\lim_{x \to 1} 5x = 5.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$. Sustituyendo y desarrollando $|f(x) - L| = |5x - 5| = 5|x - 1| < \epsilon$, por otra parte tenemos que $|x - 1| < \delta$, por lo tanto lo primero será cierto si $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$.

Paso 2 Esto puede apreciarse en la figura 2.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si
$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, tenemos $|x - c| = |x - 1| < \delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, entonces $5|x - 1| = |5x - 5| < \epsilon$, es decir $|f(x) - L| = |5x - 5| < \epsilon$. $\square$

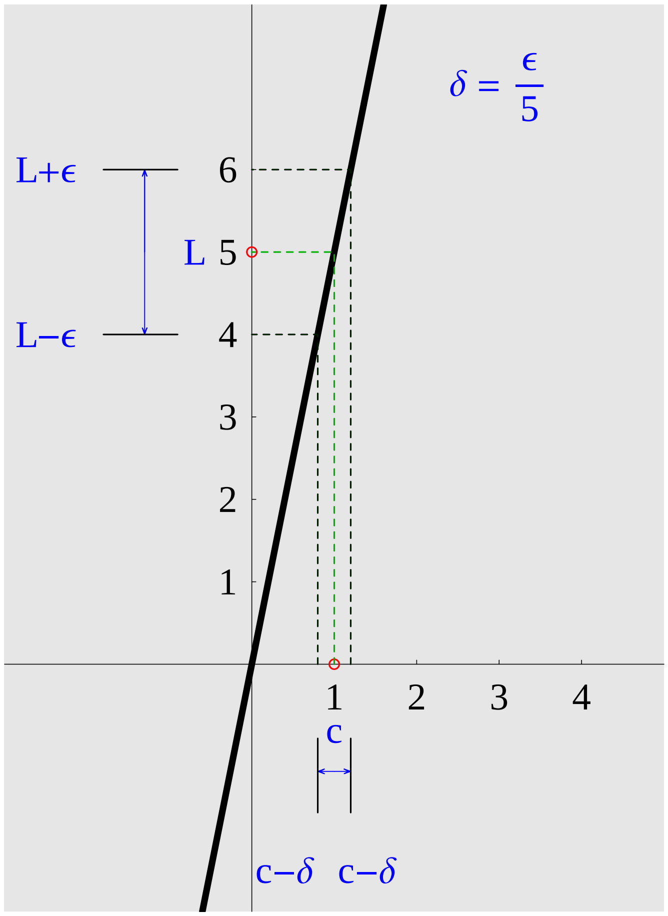


Figura 2.2: $f(x) = 5x, c = 1, L = 5$.

Ejercicio 3 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{2} = 2.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, entonces: $|f(x) - L| = |\frac{x}{2} - 2| = \frac{1}{2}|x - 4| < \epsilon$, por otra parte tenemos que $|x - 4| < \delta$, por lo tanto lo primero será cierto si tomamos $\delta = 2\epsilon$

Paso 2 Esto puede apreciarse mejor en la figura 3.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = 2\epsilon$, como $|x - c| = |x - 4| < \delta = 2\epsilon$, entonces $\frac{1}{2}|x - 4| < \epsilon$, es decir $|f(x) - L| = |\frac{x}{2} - 2| < \epsilon$. $\square$

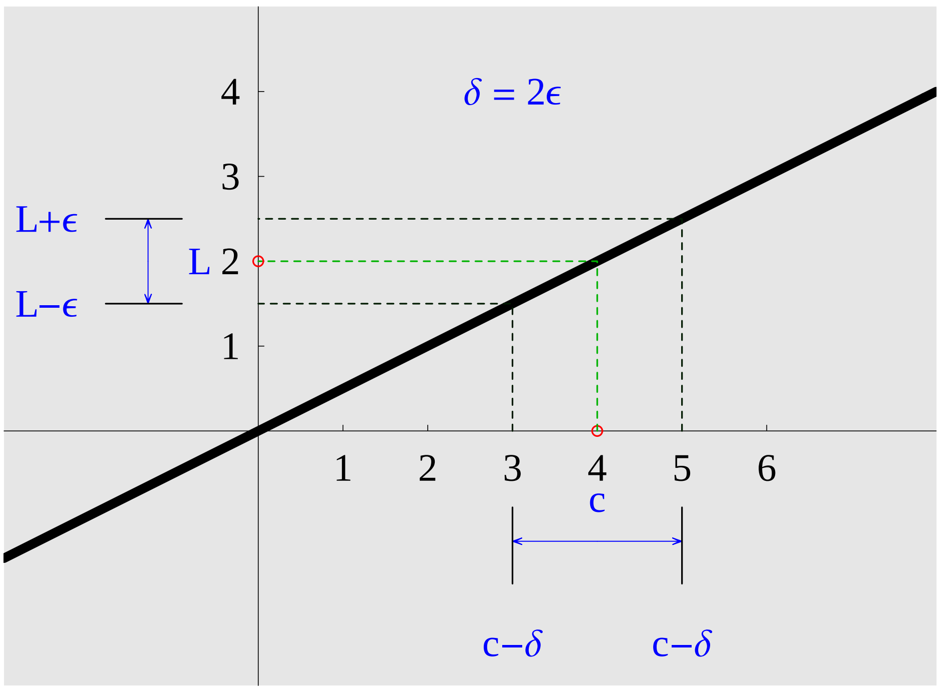


Figura 2.3: $f(x) = x/2, c = 4, L = 2.$

Ejercicio 4 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to c} ax + b = ac + b.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, entonces. De los problemas anteriores podemos inferir que si tomamos a $\delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, podemos mostrar lo requerido.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, como $|x - c| < \delta = \dfrac{\epsilon}{a}$, entonces $|ax - ac| < \epsilon$, es decir $|ax - ac + b - b| = |ax + b - (ac + b)| = |f(x) - L| < \epsilon$. □

Ejercicio 5 *Demostrar por $\epsilon - \delta$ que*

$$\lim_{x \to 0} xsen(1/x) = 0.$$

Parte 1 Truco para encontrar δ:

Paso 1 Queremos que $|f(x) - L| < \epsilon$, sabemos que $|sen(1/x)| \leq 1$ se cumple siempre, por lo tanto $|xsen(1/x)| \leq |x|$.

Paso 1 Ver figura 4.

Parte 2 Demostración:

Paso 1 Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar δ, tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Paso 2 De la parte 1, dado $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon$, como $|x - c| = |x| < \delta = \epsilon$, entonces de parte 1, $|xsen(1/x) - 0| \leq |x| < \delta = \epsilon$, es decir $|f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

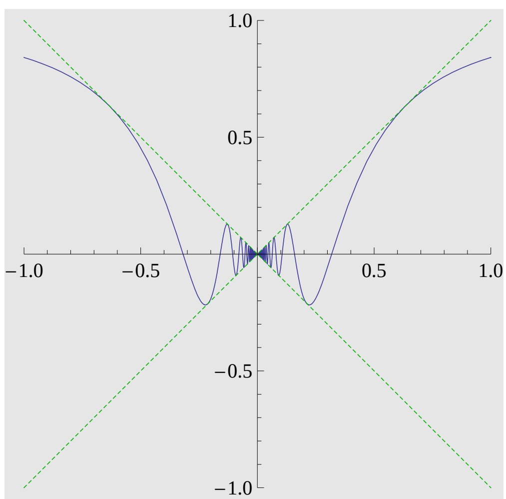


Figura 4: $f(x) = xsen(1/x)$

3

Límites con simple evaluación

En muchos casos, calcular un límite es muy simple, por ejemplo si la función es continua. Entonces el límite llega a ser una simple evaluación.

Ejercicio 6 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Parte 1 Para funciones (continuas), donde el punto c esta definida, el límite se encuentra con simple sustitución.

Parte 2 En nuestro caso, $f(1) = 3$, por lo tanto $\lim_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 3$.

Ejercicio 7 *Encontrar*

$$\lim_{x\to -3} \frac{2}{x+2}.$$

Parte 1 Para funciones (continuas), donde el punto $c = -3$ esta definida, el límite se encuentra con simple sustitución.

Parte 2 En nuestro caso, $f(-3) = -2$, por lo tanto $\lim_{x\to -3} \frac{2}{x+2} = -2$.

4

Límites con una diferencia de cuadrados o factorización

Ejercicio 8 *Encontrar*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 2$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \\ &= (x + 2) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es 4.

Ejercicio 9 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= (x-1) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es -2.

Ejercicio 10 *Encontrar*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = a$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-a^2}{x-a} &= \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= (x+a) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $2a$.

Ejercicio 11 *Encontrar*

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^3+1}{x+1} &= \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1} \\ &= x^2-x+1 \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es 3.

Ejercicio 12 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -1$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} &= \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1} \\ &= (2x - 3) \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es -5.

Ejercicio 13 *Encontrar*

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = -3$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9} &= \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{x - 2}{x - 3} \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{5}{6}$.

Ejercicio 14 *Encontrar*

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 4$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} &= \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \\ &= \frac{x-1}{x+2} \end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{1}{2}$.

5

Límites obtenidos multiplicando por el conjugado

Ejercicio 15 *Encontrar*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 0$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera, multiplicando por el conjugado del numerador así:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\
&= \frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ejercicio 16 *Encontrar*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Parte 1 La función no está definida en $x = 3$, pero podemos reducir la función de la siguiente manera, multiplicando por el conjugado del numerador así:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\,\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\
&= \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\
&= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}
\end{aligned}$$

Parte 2 De la primera parte, ahora podemos ver que el límite es $\frac{1}{4}$.