Matrices

Definiciones básicas de matrices

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1

Matrices

Definición 1 *Una matriz real es una función A de $[1,..,n] \times [1,..,m]$, al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y decimos que A tiene orden $n \times m$*

Una matriz A se representa con todos sus valores de manera usual como un arreglo de n filas y m columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También la podemos representar como $A = (a_{ij})$, donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Ejemplos de matrices:

1. Ejemplo de una matriz 2×2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

   Como función la matriz anterior se escribe $A : [1,..,n] \times [1,..,m] \to \mathbb{R}$, donde:

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & \mapsto & a_{11} \\ (1,2) & \mapsto & a_{12} \\ (2,1) & \mapsto & a_{21} \\ (2,2) & \mapsto & a_{22} \end{array}$$

2. Ejemplo de una matriz 3×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

   Como función se escribe $A : [1, .., 3] \times [1, .., 3]$, donde:

$$\begin{array}{ccc} (11) & \mapsto & a_{11} \\ (12) & \mapsto & a_{12} \\ (13) & \mapsto & a_{13} \\ (21) & \mapsto & a_{21} \\ (22) & \mapsto & a_{22} \\ (23) & \mapsto & a_{23} \\ (31) & \mapsto & a_{31} \\ (32) & \mapsto & a_{32} \\ (33) & \mapsto & a_{33} \end{array}$$

3. Ejemplo de una matriz 3×2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

4. Ejemplo de una matriz 2×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

5. Ejemplo de una matriz 1×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$

6. Ejemplo de una matriz 3×1: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

1.1. Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Éste conjunto de matrices suele escribirse como M_n. Las matrices cuadradas tienen propiedades particulares.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Matriz transpuesta

Dada una matriz A se define la matriz transpuesta A^T (la transpuesta),como aquella que cambia las filas por columnas, o las columnas por filas, es decir:

Si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$

Para una matriz en M_3:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Propiedades de la matriz transpuesta:

1. $(A^T)^T = A$, la transpuesta de una transpuesta es igual a la matriz.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$, la transpuesta de una suma, es la suma de las transpuestas.
3. $(AB)^T = B^T A^T$, la transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas conmutado.
4. $(rA)^T = rA^T$, la transpuesta de un producto escalar es el producto escalar de la transpuesta.
5. Si $A = A^T$, la matriz se llama simétrica.
6. Si $A^T = -A$, la matriz se llama antisimétrica.

1.3. Matriz identidad

En M_n existe la matriz identidad, que consiste en una matriz con unos en la diagonal (es decir donde $i = j$) y ceros en otro lugar (o sea donde $i \neq j$).

Por ejemplo en M_3,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formalmente $I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

1.4. Matriz diagonal

La matriz es diagonal si tiene valores cero fuera de la diagonal. En la diagonal es posible tener ceros o no.

Si $a_{ij} = 0$, con $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.5. Matriz triángular

Una matriz es triángular superior, si tiene valores cero abajo de la.

Si $a_{ij} = 0$, con $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es triángular inferior, si tiene valores cero arriba de la diagonal.

Si $a_{ij} = 0$, con $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.6. Matrices binarias

Una matriz es binaria, si sus entradas toman sólo dos valores diferentes, podemos tomar los valores de $0, 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices binarias tienen varias aplicaciones, los valores $0, 1$ representan elementos de un campo finito de dos elementos, esto quiere decir que los elementos $0, 1$ se pueden multiplicar y sumar, y en ambos casos forman un grupo Abeliano.

Es decir:

$+ : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

$$\begin{array}{ccc} 0+0 & \mapsto & 0 \\ 0+1 & \mapsto & 1 \\ 1+0 & \mapsto & 1 \\ 1+1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Para esta suma:

1. La suma es conmutativa.
2. La suma es asociativa.
3. Existe el neutro aditivo, 0.
4. Existe el inverso aditivo, $-a$.

$\cdot : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

$$\begin{array}{ccc} 0 \cdot 0 & \mapsto & 0 \\ 0 \cdot 1 & \mapsto & 0 \\ 1 \cdot 0 & \mapsto & 0 \\ 1 \cdot 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Para este producto:

1. El producto es conmutativo.
2. El producto es asociativo.
3. Existe el neutro multiplicativo , 1.
4. Existe el inverso multiplicativo, a^{-1}.

2

Operaciones entre matrices

2.1. Suma entre matrices

La suma esta definida sólo para matrices del mismo orden, es decir, sólo se puede sumar una matriz de orden $n \times m$ con otra de orden $n \times m$. La suma se realiza entrada por entrada, es decir:

Si $A = (a_{ij})$, y $B = (b_{ij})$, entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Ejemplos de suma de matrices:

1. Una matriz de orden 2×2 más otra del mismo orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)+(-1) & (2)+(0) \\ (3)+(2) & (4)+(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz de orden 3×2 más otra del mismo orden 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz 3×3 sumada con otra del mismo orden 3×3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Las matrices con la suma forman un grupo Abeliano, es decir:

1. La suma de matrices es conmutativa, $A + B = B + A$.
2. La suma de matrices es asociativa, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Existe la matriz (neutro aditivo) cero, tal que $A + 0 = 0 + A = A$.
4. Para toda matriz A, existe (inverso aditivo) la matriz $-A$.

2.2. Producto por un escalar

El producto de un escalar (número real) r por una matriz rA, se define de la forma natural, es decir, multiplicar cada entrada de A por el número r. El orden de A puede ser cualquiera.

Si $A = (a_{ij})$, entonces $rA = (ra_{ij})$

Ejemplos

1. Una matriz 2×2 por $r = 3$.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 3×2 por $r = 2$.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 3×3 por r.

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

2.3. Producto de matrices

El producto de matrices esta definido, entre A, matriz de orden $n \times p$, por B de orden $p \times m$. Dando como resultado C de orden $n \times m$

Si $A = (a_{ij})$, y $B = (b_{ij})$, entonces $C = (c_{ij})$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik})(b_{kj})$.

Ejemplos de producto de matrices:

1. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (3)(2) \\ (1)(3) + (2)(4) & (0)(3) + (3)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

El proceso es el siguiente:

a) Se multiplica la primera fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\;1 + 2\;2 & \_ \\ \_ & \_ \end{pmatrix}$$

b) Se avanza de fila y se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & \_ \\ 1\;3 + 2\;4 & \_ \end{pmatrix}$$

c) De manera similar se multiplica la primera fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & 0\ 1 + 3\ 2 \\ (1)(3)+(2)(4) & \_ \end{pmatrix}$$

d) Avanzando de fila finalmente, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1)+(2)(2) & (0)(1)+(3)(2) \\ (1)(3)+(2)(4) & 0\ 3 + 3\ 4 \end{pmatrix}$$

---

2. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-3)+(-1)(5) & (3)(-3)+(4)(5) \\ (-2)(1)+(-1)(2) & (3)(1)+(4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

---

3. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1)+(1)(1) & (2)(1)+(1/2)(1) \\ (-1)(2)+(1)(-1) & (2)(2)+(1/2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

---

4. Una matriz 2×3 por otra de orden 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)(1)+(0)(3)+(3)(5) & (1)(1)+(1/2)(3)+(-2)(5) \\ (-1)(2)+(0)(4)+(3)(6) & (1)(2)+(1/2)(4)+(-2)(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -15/2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

---

5. Una matriz A, 3×3 por otra B de orden 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Resumiendo:

1. La suma de matrices forma un grupo Abeliano, es decir, es conmutativa, es asociativa, existe la matriz cero 0, y para toda matriz A, existe la matriz inversa aditiva $-A$.

2. Para el producto de matrices: éste NO es conmutativo, si es asociativo, existe la matriz neutra I (para matrices cuadradas), y NO para toda matriz A, existe su matriz inversa multiplicativa A^{-1}.

3 Matriz inversa

Una matriz cuadrada A tiene inversa, si existe la matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Se dice también que A es invertible o no singular.

Observación: No siempre existe la matriz inversa.

3.1. Obtención de la matriz inversa por medio de Operaciones Elementales

La matriz inversa de una matriz A se puede obtener aplicando un método similar al método de Gauss-Jordan para resolver SEL.

Operaciones elementales sobre filas de matrices.

1. Cambio de dos filas.
2. Multiplicar una fila por una constante.
3. Sumar el múltiplo de una fila a otra fila.

Sea A una matriz, entonces existe la inversa A^{-1}, si se puede calcular por el siguiente procedimiento.

1. Considere la matriz $(A|I)$, que significa ajuntar a A la matriz identidad I.
2. Aplicar las operaciones elementales a las filas de A suficientes para convertirla en la matriz I.
3. Las mismas operaciones elementales hay que aplicarlas (al mismo tiempo) a I adjuntada.

4. La matriz de la derecha que resulte de 3, es la matriz inversa $(I|A^{-1})$.

Observación: si no es posible aplicar este método, entonces la matriz inversa no existe.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Adjuntar a A la matriz identidad I, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -3F_1 + F_2$

$$\begin{array}{rrr|rr} -3F_1 = & -3 & -6 & -3 & 0 \\ F_2 = & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = F_2 + F_1$

$$\begin{array}{rrr|rr} F_2 = & 0 & -2 & -3 & 1 \\ F_1 = & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$.

f) Finalmente $F_2 = \dfrac{1}{-2}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 6/2-4/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + F_2$

$$\begin{array}{r rr|rr} -2F_1 = & -2 & 2 & -2 & 0 \\ F_2 = & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = F_2 + 3F_1$

$$\begin{array}{r rr|rr} F_2 = & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3F_1 = & 3 & -3 & 3 & 0 \\ \hline F_1 = & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

f) Finalmente $F_1 = \frac{1}{3}F_1$, $F_2 = \frac{1}{3}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3+2/3 & 1/3-1/3 \\ 2/3-2/3 & 2/3+1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3 Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + 5F_2$

$$\begin{array}{r rr|rr} -2F_1 = & -10 & -6 & -2 & 0 \\ 5F_2 = & 10 & 10 & 0 & 5 \\ \hline F_2 = & 0 & 4 & -2 & 5 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right)$.

d) Aplicar ahora $F_1 = -3F_2 + 4F_1$

$$\begin{array}{r rr|rr} -3F_2 = & 0 & -12 & 6 & -15 \\ 4F_1 = & 20 & 12 & 4 & 0 \\ \hline F_1 = & 20 & 0 & 10 & -15 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right)$.

f) Finalmente $F_1 = \dfrac{1}{20}F_1$, $F_2 = \dfrac{1}{4}F_2$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 5/4 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$

h) Comprobando: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2-3/2 & -15/4+15/4 \\ 2/2-2/2 & -6/4+10/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -2F_1 + F_2$

$$\begin{array}{r|rr|rr} -2F_1 = & -2 & -2 & -2 & 0 \\ F_2 = & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline F_2 = & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

d) En este caso no se puede aplicar el método, por lo tanto la matriz inversa NO existe. Observemos que F_2 es múltiplo de F_1.

Ejemplo 5 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -F_1 + F_2$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_1 = & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ F_2 = & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

d) Aplicar ahora $F_3 = F_2 + F_3$

$$\begin{array}{rccc|ccc} F_2 = & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ F_3 = & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

f) Ahora;
$F_2 = F_3 + F_2$
$F_1 = -3F_3 + F_1$

$$\begin{array}{rccc|ccc} F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ F_2 = & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc|ccc} -3F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ F_1 = & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \end{array}$$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \boxed{0} & 4 & -3 & -3 \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{0} & -2 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

h) Ahora;
$F_1 = 2F_2 + F_1$

$$\begin{array}{rccc|ccc} 2F_2 = & 0 & -2 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

i) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 & -1 \\ \boxed{0} & -1 & \boxed{0} & -2 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

j) Por último
$F_2 = -F_2$

k) Finalmente obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 1 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 2 & -2 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

l) Comprobando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 1-4+3 & -1-2+3 \\ 2-2 & 1-2+2 & -1-1+2 \\ 2-2 & -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_3 = -F_1 + F_3$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_1 = & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ F_3 = & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

d) Aplicar ahora:
$F_2 = -3F_3 + F_2$
$F_1 = -3F_3 + F_1$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 \\ F_2 = & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|rrr} -3F_3 = & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 \\ F_1 = & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \boxed{0} & 4 & 0 & -3 \\ \boxed{0} & 2 & \boxed{0} & 3 & 1 & -3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

f) Ahora;
$F_1 = -F_2 + F_1$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_2 = & 0 & -2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ F_1 = & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ \hline F_1 = & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & \boxed{0} & 3 & 1 & -3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

h) Por último
$F_2 = F_2/2$

i) Finalmente obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) Comprobando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-3 & -1+1+0 & 0-3+3 \\ 0+3-3 & 0+1+0 & 0-3+3 \\ 1+3-4 & -1+1+0 & 0-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ejemplo 7}}$ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz inversa A^{-1}, y comprobar el resultado.

a) Considerar: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

b) Aplicar $F_2 = -F_1 + F_2$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_1 = & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ F_2 = & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline F_2 = & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

d) Aplicar $F_3 = -F_2 + F_3$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr} -F_2 = & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ F_3 = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F_3 = & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

e) Obtenemos $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

f) Aplicar ahora:

$F_2 = 2F_3 + F_2$

$F_1 = F_3 + F_1$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
2F_3 = & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\
F_2 = & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
F_2 = & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrr}
F_3 = & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
F_1 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
F_1 = & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1
\end{array}$$

g) Obtenemos $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

h) Ahora;

$F_1 = -F_2 + F_1$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
-F_2 = & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
F_1 = & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
F_1 = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{array}$$

i) Obtenemos $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

j) Por último

$F_3 = -F_3$

k) Finalmente obtenemos $\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Por lo tanto la inversa A^{-1} es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

l) Comprobando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 0-1+1 & -1+2-1 \\ 1+2-3 & 0-2+3 & -1+4-3 \\ 0+1-1 & 0-1+1 & 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación importante: el orden para hacer "ceros" las entradas dentro de la matriz debe seguirse siempre la siguiente secuencia.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 6_a & 5_a \\ 1_a & a_{22} & 4_a \\ 2_a & 3_a & a_{33} \end{pmatrix}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe la matriz inversa.
2. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.

4

Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices

Un sistema de ecuaciones lineales, ya sea homogéneo o no homogéneo puede ser escrito mediante matrices.

Definición 2 *Considere el siguiente sistema de m ecuaciones con n incógnitas:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

donde las constantes $a_{11},..,a_{1n},a_{12},...a_{2n},..,a_{m1},..,a_{mn},b_1,..,b_m \in \mathbb{R}$, y las incógnitas $x_1,..,x_n$ representan también números reales.

Entonces tenemos la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Escrito como $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Proposición 1 *El sistema de ecuaciones lineales SEL $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una única solución, si y sólo si la matriz A tiene inversa. En este caso la solución es $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.*

Ahora tenemos las siguientes equivalencias:

1. Existe la matriz inversa.
2. La matriz es equivalente por OE a la matriz Identidad.
3. El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene como única solución a la trivial.
4. El sistema $Ax = b$, tiene una única solución.