MathCon

The Mathematics Firm

mcd y mcm

Máximo Común Divisor y Mínimo Común múltiplo

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel

jjaa@math.com.mx

Contenido

1
Divisores de un número entero

Dado un número entero positivo a decimos que c divide a a, si podemos escribir a $a = cd$, se acostumbra a escribir esto como $c|a$, también se dice que c es un factor de a ó que a es múltiplo de c.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $a = 10$, entonces 5 divide a 10, porque $10 = 5 \cdot 2$, (también $2|10$).

Ejemplo 2 Sea $a = 16$, entonces 2 divide a 16, porque $16 = 2 \cdot 8.$, (también $8|16, 4|16$).

Ejemplo 3 Sea $a = 24$, entonces 6 divide a 24, porque $24 = 6 \cdot 4.$, (también $2|24, 4|24, 12|24$).

Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número se puede escribir como producto de potencias de números primos de manera única, es decir si conocemos la representación de un número entero $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$. Entonces conocemos a todos los factores de a.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Si $a = 10$, como $a = 5 \cdot 2$, entonces

$$\{1, 2, 5, 10\}$$

son los únicos factores de 10.

Ejemplo 2 Si $a = 16$, como $a = 2^4$, entonces

$$\{1, 2, 4, 8, 16\}$$

son los únicos factores de 16.

Ejemplo 3 Si $a = 24$, como $a = 2^3 \cdot 3$, entonces

$$\{1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24\}$$

son los únicos factores de 24.

2

Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos enteros a, b no cero, es el entero d más grande que divide a ambos, y se escribe como $d = (a, b)$.

Existen dos formas comunes para conocer el $m.c.d.$ de a, b. La primera hace uso del conocimiento de todos los factores de los dos números a, b. Esto es efectivo solo para números pequeños ya que conocer la factorización (conocer todos los factores) completa de un número es eficiente solo para números pequeños.

La segunda forma, es a través del algoritmo de Euclides.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $a = 10$ y $b = 15$.

Para $a = 10$ los factores son $\{1, 2, 5, 10\}$
Para $a = 15$ los factores son $\{1, 3, 5, 15\}$

Los factores comunes de $10, 15$ son $\{1, 5\}$

Entonces el máximo común divisor es $(10, 15) = 5$.

Ejemplo 2 Sea $a = 20$ y $b = 30$.

Para $a = 20$ los factores son $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$
Para $a = 30$ los factores son $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Los factores comunes de $20, 30$ son $\{1, 2, 3, 5, 10\}$

Entonces el máximo común divisor es $(20, 30) = 10$.

2.1. Otra forma de encontrar el máximo común divisor

Ejemplo 1 Sea $a = 20$ y $b = 24$.

La factorización de $a = 20$ es $20 = 2^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 24$ es $24 = 2^3 \cdot 3$

Entonces nos fijamos en los factores comunes, qué en este caso son las potencias de 2, y tomamos la potencia menor.

Entonces el máximo común divisor de 20 y 24 es $d = 2^2 = 4$.

Ejemplo 2 Sea $a = 180$ y $b = 168$.

La factorización de $a = 180$ es $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 24$ es $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Entonces nos fijamos en los factores comunes, qué en este caso son las potencias de 2 y 3, y tomamos la potencia menor.

Entonces el máximo común divisor de 180 y 168 es $d = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Ejemplo 3 Sea $a = 900$ y $b = 1080$.

La factorización de $a = 900$ es $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
La factorización de $a = 1080$ es $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

Entonces nos fijamos en los factores comunes, qué en este caso son las potencias de 2, 3 y 5, y tomamos la potencia menor.

Entonces el máximo común divisor de 900 y 1080 es $d = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

2.2. El mcd usando el algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides dice que dados dos números enteros a, b entonces siempre existen otros dos números enteros q, r tales que:

$$a = bq + r \text{ con } \leq r < q$$

Esto es realmente fácil de comprender, ya que si a es un entero mayor a b, entonces multiplicando q veces por b antes de alcanzarlo, hará falta un resto r menor a b para alcanzar a a.

Lo importante en el caso del mcd es que si $a = bq + r$ entonces el mcd de a, b es igual a el mcd de b, r. Como los números b, r son menores a los números a, b, entonces es más fácil calcular el mcd.

Si aplicamos varias veces este proceso, podemos llegar a obtener el mcd cuando se termine la sucesión.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $a = 20$ y $b = 24$.

$$\begin{aligned} 24 &= 20 \cdot 1 + 4 \\ 20 &= 4 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el mcd de 24 y 20 es 4.

Ejemplo 2 Sea $a = 180$ y $b = 168$.

$$\begin{aligned} 180 &= 168 \cdot 1 + 12 \\ 168 &= 12 \cdot 14 + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el mcd de 180 y 168 es 12.

Ejemplo 3 Sea $a = 900$ y $b = 1080$.

$$\begin{aligned} 1080 &= 900 \cdot 1 + 180 \\ 900 &= 180 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el mcd de 1080 y 900 es 180.

Ejemplo 4 Sea $a = 3100$ y $b = 1508$.

$$\begin{aligned} 3100 &= 1508 \cdot 2 + 84 \\ 1508 &= 84 \cdot 17 + 80 \\ 84 &= 80 \cdot 1 + 4 \\ 80 &= 4 \cdot 20 + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el mcd de 3100 y 1508 es 4.

Observación: mientras a y b tengan casi los mismos factores comunes, entonces el algoritmo de Euclides es corto, en caso contrario el algoritmo es más largo.

3
Mínimo común multiplo

Si a, b son dos números enteros cualquier otro número que los tenga como factores será un múltiplo de a, b. Entonces debe existir un mínimo común múltiplo, mcm.

Existe una relación entre el mcm y el mcd, y esta es:

$$mcd(ab)mcm(ab) = (ab)$$

También puede ser escrita como $(a, b)[a, b] = ab$, quiere decir que el máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de dos números es el producto de los dos números.

Entonces conociendo el mcd puede ser obtenido fácilmente el mcm.

Ahora para obtener el mcm conociendo la factorización de a, b en productos de potencias de primos, se toman todos los factores primos con la potencia máxima.

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $a = 20$ y $b = 24$.

La factorización de $a = 20$ es $20 = 2^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 24$ es $24 = 2^3 \cdot 3$

Entonces nos fijamos en los factores primos de ambos, qué en este caso son las potencias de $2, 3, 5$, y tomamos la potencia mayor (recuerde que $p^0 = 1$).

Entonces el mínimo común múltiplo de 20 y 24 es $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Ejemplo 2 Sea $a = 180$ y $b = 168$.

La factorización de $a = 180$ es $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 168$ es $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Entonces nos fijamos en los factores comunes, qué en este caso son potencias de $2, 3, 5, 7$, y tomamos la potencia mayor.

Entonces el mínimo común múltiplo de 180 y 168 es $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Ejemplo 3 Sea $a = 900$ y $b = 1080$.

La factorización de $a = 900$ es $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
La factorización de $a = 1080$ es $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

Entonces nos fijamos en los factores comunes, qué en este caso son potencias de 2, 3 y 5, y tomamos la potencia mayor.

Entonces el mínimo común múltiplo de 900 y 1080 es $m = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 5400$.

3.1. Relación entre el mcd y el mcm

Observación: para obtener el mcd tomamos la potencia mínima de un factor primo y para obtener el mcm tomamos la potencia máxima, entonces es claro que el producto del mcd por el mcm es el producto de los números a, b

Ejemplos:

Ejemplo 1 Sea $a = 20$ y $b = 24$.

Para el mcd nos fijamos en las potencias menores:
La factorización de $a = 20$ es $20 = 2^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 24$ es $24 = 2^3 \cdot 3$

Para el mcm nos fijamos en las potencias mayores:
La factorización de $a = 20$ es $20 = 2^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 24$ es $24 = 2^3 \cdot 3$

Por lo tanto tenemos que: $2^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3 = 20 \cdot 24$, ya que son todos los factores que aparecen tanto en 20 como en 24.

Ejemplo 2 Sea $a = 180$ y $b = 168$.

Para el mcd nos fijamos en las potencias menores:
La factorización de $a = 180$ es $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 168$ es $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Para el mcm nos fijamos en las potencias mayores:
La factorización de $a = 180$ es $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
La factorización de $a = 168$ es $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Por lo tanto tenemos que: $2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 180 \cdot 168$, ya que son todos los factores que aparecen tanto en 180 como en 168.

Ejemplo 3 Sea $a = 900$ y $b = 1080$.

Para el mcd nos fijamos en las potencias menores:
La factorización de $a = 900$ es $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
La factorización de $a = 1080$ es $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

Para el mcm nos fijamos en las potencias mayores:
La factorización de $a = 900$ es $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
La factorización de $a = 1080$ es $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

Por lo tanto tenemos que: $2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 900 \cdot 1080$, ya que son todos los factores que aparecen tanto en 900 como en 1080.