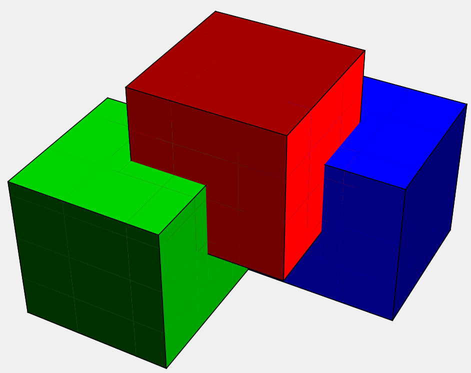
MathCon

The Mathematics Firm

Ecuaciones de segundo grado



www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel

jjaa@math.com.mx

Contenido

1
La ecuación cuadrática

Definición 1 *La ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c$ *se llama ecuación cuadrática. La cantidad* $\Delta = b^2 - 4ac$ *se llama el discriminante de la ecuación*

La ecuación $ax^2 + bx + c$, se suele llamar también ecuación de segundo grado o ecuación parabólica, ya que la gráfica que describe es una parábola.

Definición 2 *Un número* x_0 *tal que al sustituirlo en la ecuación es cero* $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ *se llama raíz o cero de la ecuación cuadrática*

Estudiaremos aquí diferentes forma de ecuaciones de segundo grado, tratando de encontrar sus raíces y su discriminante.

Las formas de ecuaciones que estudiaremos son:

1. $x^2 - d^2$
2. $(mx)^2 - d^2$
3. $ax^2 + bx$
4. Trinomios cuadrados perfectos.
5. Completar el trinomio cuadrado perfecto.
6. La forma general.

2

La ecuación $x^2 - d^2$

La ecuación de la forma $(mx)^2 - d^2$ es una diferencia de cuadrados, por lo que se aplica la fórmula $(mx)^2 - d^2 = (mx + d)(mx - d)$.

Ejemplos:

Ejem. 1 $x^2 - 1$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(x + 1)(x - 1) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, ya que al sustituir $(x + 1)(x_1 - 1) = 0$ y $(x_2 + 1)(x - 1) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(1)(-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ejem. 2 $x^2 - 4$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(x + 2)(x - 2) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, ya que al sustituir $(x + 2)(x_1 - 2) = 0$ y $(x_2 + 2)(x - 2) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(1)(-4) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Ejem. 3 $x^2 - 9$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(x+3)(x-3) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, ya que al sustituir $(x+3)(x_1-3) = 0$ y $(x_2+3)(x-3) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(1)(-9) \\ &= 36 \end{aligned}$$

Ejem. 4 $x^2 - 16$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(x+4)(x-4) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, ya que al sustituir $(x+4)(x_1-4) = 0$ y $(x_2+4)(x-4) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(1)(-16) \\ &= 64 \end{aligned}$$

Ejem. 5 $x^2 - 25$, esta ecuación se puede factorizar como sigue: $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$. Se deduce que las raíces son $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, ya que al sustituir $(x+5)(x_1-5) = 0$ y $(x_2+5)(x-5) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -5 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(1)(-25) \\ &= 100 \end{aligned}$$

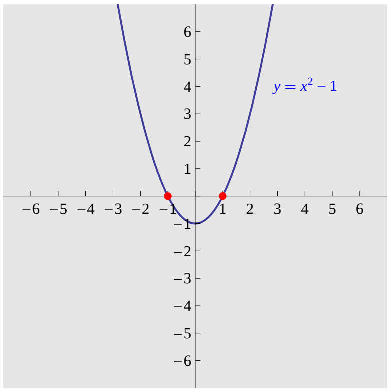
2.1. Resúmen de la ecuación $x^2 - d^2$

Para el caso especial de las parábolas de la forma $x^2 - d^2$ de acuerdo a los ejemplos anteriores podemos resumir lo siguiente:

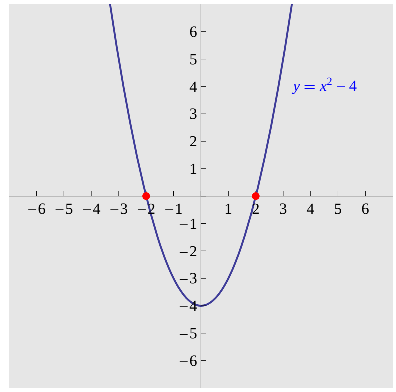
Ecuación	Raíz 1	Raíz 2	Discriminante
$x^2 - 1$	1	-1	4
$x^2 - 4$	2	-2	16
$x^2 - 9$	3	-3	36
$x^2 - 16$	4	-4	64
$x^2 - 25$	5	-5	100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x^2 - d^2$	d	$-d$	$4d^2$

En general podemos concluir que la ecuación de la forma $x^2 - d^2$ tendrá como raíces a d y $-d$ y su discriminate será $4(d^2)$.

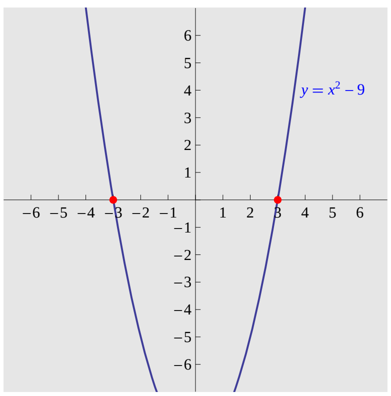
2.2. Gráficas de la ecuación $x^2 - d^2$



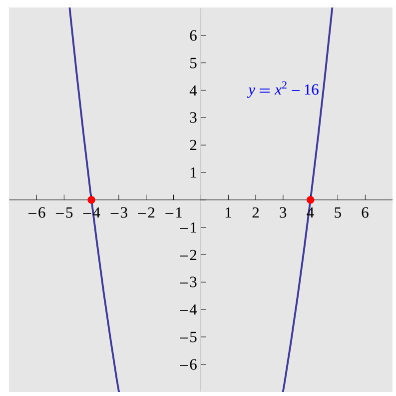
La gráfica de la función $x^2 - 1$



La gráfica de la función $x^2 - 4$



La gráfica de la función $x^2 - 9$



La gráfica de la función $x^2 - 16$

Ejercicios propuestos:

1. Encontrar las raíces, el discriminante, y la gráfica de las siguientes ecuaciones:
   a) x^2
   b) $x^2 - 36$
   c) $x^2 - 49$
   d) $x^2 - 64$
   e) $x^2 - 81$
   f) $x^2 - 100$
2. ¿Qué sucede con las ecuaciones de la forma $-x^2 + d^2$?. Hacer el mismo análisis y comprobar que tienen las mismas raíces d, $-d$, el discriminante es mismo $4d^2$. Pero la gráfica ahora abre hacia abajo.

3

La ecuación $(mx)^2 - d^2$

La ecuación de la forma $(mx)^2 - d^2$ es una diferencia de cuadrados, por lo que se aplica la fórmula $(mx)^2 - d^2 = (mx + d)(mx - d)$.

Ejem. 1 $4x^2 - 1$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(2x + 1)(2x - 1) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(2x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $(2x - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$, ya que al sustituir $(2x_1 + 1)(2x - 1) = 0$ y $(2x + 1)(2x_2 - 1) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(4)(-1) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Ejem. 2 $4x^2 - 4$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados también: $4x^2 - 4 = (2x + 2)(2x - 2)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(2x + 2)(2x - 2) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(2x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $(2x - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 1$, ya que al sustituir $(2x_1 + 1)(2x - 1) = 0$ y $(2x + 1)(2x_2 - 1) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(4)(-4) \\ &= 64 \end{aligned}$$

Ejem. 3 $4x^2 - 9$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados también: $4x^2 - 4 = (2x+3)(2x-3)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(2x+3)(2x-3) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $(2x-1) = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{3}{2}$, ya que al sustituir $(2x_1+1)(2x-1) = 0$ y $(2x+1)(2x_2-1) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3}{2} \\ x_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0^2 - (4)(4)(-9) \\ &= 144 \end{aligned}$$

Ejem. 4 $9x^2 - 1$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(3x+1)(3x-1) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(3x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $(3x-1) = 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{3}$, ya que al sustituir $(3x_1+1)(3x-1) = 0$ y $(3x+1)(3x_2-1) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0^2 - (4)(9)(-1) \\ &= 36\end{aligned}$$

Ejem. 5 $9x^2 - 4$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $9x^2 - 4 = (3x+2)(3x-2)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(3x+2)(3x-2) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(3x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$, $(3x-2) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$, ya que al sustituir $(3x_1+2)(3x-2) = 0$ y $(3x+2)(3x_2-2) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{2}{3} \\ x_2 &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0^2 - (4)(9)(-4) \\ &= 144\end{aligned}$$

Ejem. 6 $9x^2 - 9$, esta ecuación se puede factorizar aplicando la diferencia de cuadrados como sigue: $9x^2 - 9 = (3x+9)(3x-9)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $(3x+3)(3x-3) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $(3x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $(3x-3) = 0 \Rightarrow x_2 = 1$, ya que al sustituir $(3x_1+3)(3x-3) = 0$ y $(3x+3)(3x_2-3) = 0$ se cumplen las igualdades.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1\end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

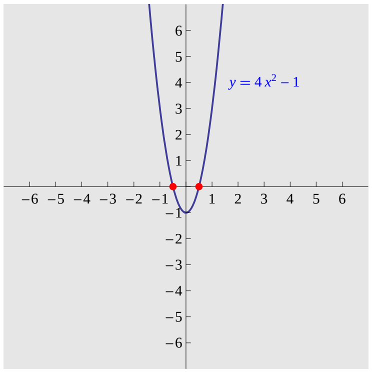
$$\begin{aligned}\Delta &= 0^2 - (4)(9)(-9) \\ &= 324\end{aligned}$$

3.1. Resúmen de la ecuación $(mx)^2 - d^2$

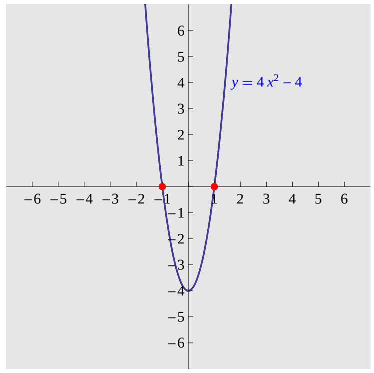
Para el caso especial de las parábolas de la forma $(mx)^2 - d^2$ de acuerdo a los ejemplos anteriores podemos resumir lo siguiente, de hecho las raíces se derivan de la factorización $(mx + d)(mx - d)$ y el discriminante del cálculo $(-4)(m^2)(-d^2) = 4m^2d^2$.

Ecuación	Raíz 1	Raíz 2	Discriminante
$(2x)^2 - 1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	16
$(2x)^2 - 4$	1	-1	64
$(2x)^2 - 9$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	144
$(3x)^2 - 1$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	36
$(3x)^2 - 4$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	144
$(3x)^2 - 9$	1	-1	324
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(mx)^2 - d^2$	$\frac{d}{m}$	$-\frac{d}{m}$	$4m^2d^2$

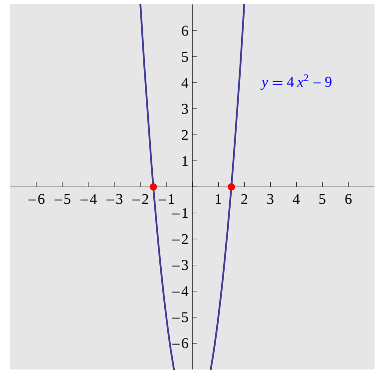
3.2. Gráficas de la ecuación $(mx)^2 - d^2$



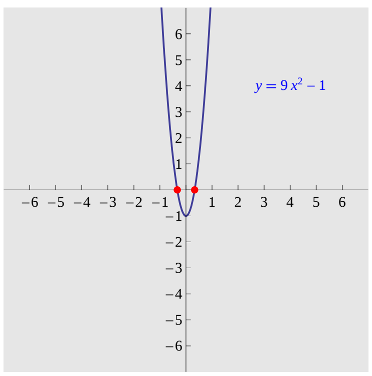
La gráfica de la función $4x^2 - 1$



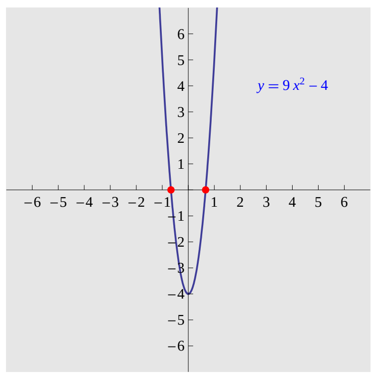
La gráfica de la función $4x^2 - 4$



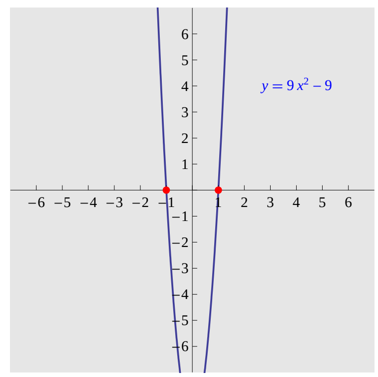
La gráfica de la función $4x^2 - 9$



La gráfica de la función $9x^2 - 1$



La gráfica de la función $9x^2 - 4$



La gráfica de la función $9x^2 - 9$

Ejercicios propuestos:

1. Encontrar las raíces, el discriminante, y la gráfica de las siguientes ecuaciones:

   a) $4x^2 - \dfrac{4}{9}$

   b) $9x^2 - \dfrac{9}{16}$

   c) $16x^2 - \dfrac{4}{25}$

2. ¿Qué sucede con las ecuaciones de la forma $-(mx)^2 + d^2$?. Hacer el mismo análisis y comprobar que tienen las mismas raíces $\dfrac{d}{m}$, $-\dfrac{d}{m}$, el discriminante es mismo $4m^2d^2$. Pero la gráfica ahora abre hacia abajo.

4

La ecuación $ax^2 + bx$

La ecuación de la forma $ax^2 + bx$ por la factorización $x(ax + b)$, siempre tiene la raíz el cero y la otra raíz es $-\dfrac{b}{a}$.

Ejem. 1 $x^2 + x$, esta ecuación se puede factorizar como sigue: $x^2 + x = x(x+1)$. Entonces las raíces son los números que hacen la siguiente igualdad $x(x+1) = 0$ verdadera. Se deduce que las raíces son $\mathrm{x}_1 = 0$, $\mathrm{x}_2 = -1$.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejem. 2 $x^2 + 2x$, esta ecuación se puede factorizar como sigue: $x^2 + 2x = x(x + 2)$. Se deduce que las raíces son $\mathrm{x}_1 = 0$, $\mathrm{x}_2 = -2$.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ejem. 3 $3x^2 + 2x$, esta ecuación se puede factorizar como sigue: $3x^2 + 2x = x(3x + 2)$. Se deduce que las raíces son $\mathrm{x}_1 = 0$, $\mathrm{x}_2 = -\frac{2}{3}$.

a) Las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) El discriminate de la ecuación es:

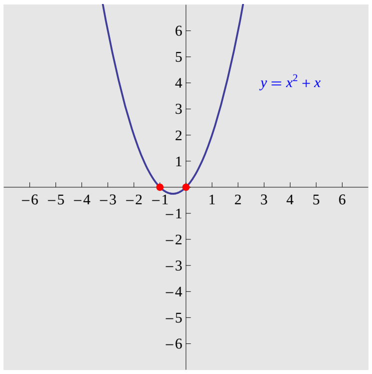
$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

4.1. Resúmen de la ecuación $ax^2 + bx$

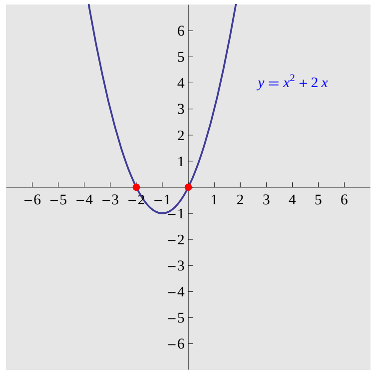
Para el caso especial de las parábolas de la forma $ax^2 + bx$, siempre tiene la raíz cero, y la otra raíz es $-\frac{b}{a}$ que se deriva de la factorización $ax^2 + bx = x(ax + b)$ y el discriminante es b^2.

Ecuación	Raíz 1	Raíz 2	Discriminante
$x^2 + x$	0	-1	1
$x^2 + 2x$	0	-2	4
$3x^2 + 2x$	0	$-\frac{2}{3}$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$ax^2 + bx$	0	$-\frac{b}{a}$	b^2

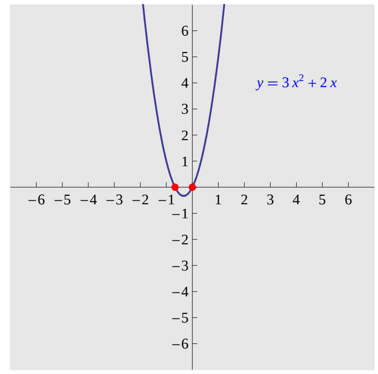
4.2. Gráficas de la ecuación $ax^2 + bx$



La gráfica de la función $x^2 + x$



La gráfica de la función $x^2 + 2x$



La gráfica de la función $3x^2 + 2x$

5

Trinomios cuadrados perfectos

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto si es posible factorizarlo como el cuadrado de una suma, es decir si $ax^2+bx+c = (mx+n)^2$. Desarrollando el binomio $(mx + n)^2 = (mx)^2 + 2mxn + n^2$, entonces la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}\sqrt{a}$.

Si $a = 1$, entonces la expresión $x^2 + bx + c$ será un trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, y $(x^2 + bx + c) = (x \pm \sqrt{c})^2$. El signo se elige de acuerdo al signo de b.

Ejemplos:

Ejem. 1 Sea $x^2 + 4x + 4$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 4$ y $\sqrt{4} = 2$.
Ya que $b = 2 \cdot 2$, sí es un TCP, y $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Ejem. 2 Sea $x^2 + 6x + 9$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 9$ y $\sqrt{9} = 3$.
Ya que $b = 2 \cdot 3$, sí es un TCP, y $x^2 + 3x + 9 = (x + 3)^2$.

Ejem. 3 Sea $x^2 + 8x + 16$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 16$ y $\sqrt{16} = 4$.
Ya que $b = 2 \cdot 4$, sí es un TCP, y $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

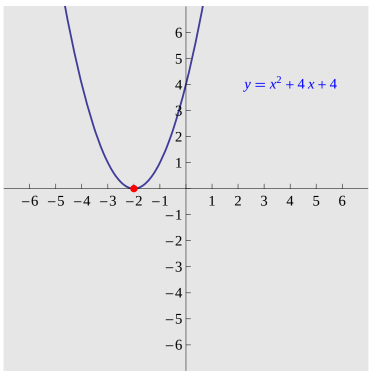
Ejem. 4 Sea $x^2 + 10x + 25$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 25$ y $\sqrt{25} = 5$.
Ya que $b = 2 \cdot 5$, sí es un TCP, y $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

Ejem. 5 Sea $x^2 + 12x + 36$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 36$ y $\sqrt{36} = 6$.
Ya que $b = 2 \cdot 6$, sí es un TCP, y $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$.

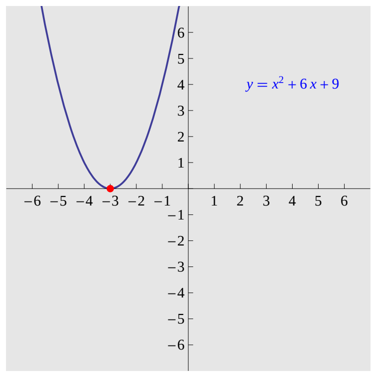
Ejem. 6 Sea $x^2 - 10x + 25$, en este caso $a = 1$, entonces será trinomio cuadrado perfecto si $b = 2\sqrt{c}$, como $c = 25$ y $\sqrt{25} = 5$.
Ya que $b = 2 \cdot 5$, sí es un TCP, y $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.

Como un TCP siempre se reduce a una expresión $(x \pm d)^2$, entonces las dos raíces son siempre iguales y son $x_0 = \mp d$.

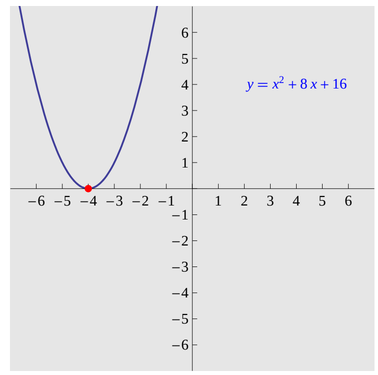
5.1. Gráficas de trinomios cuadrados perfectos



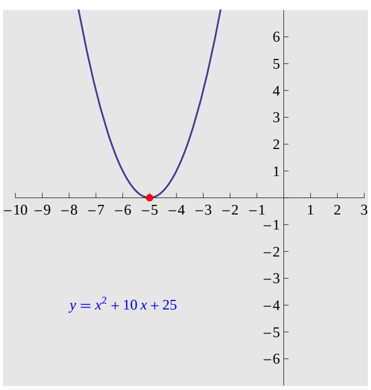
La gráfica de la función $x^2 + 4x + 4$



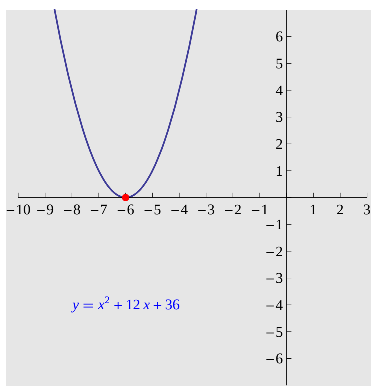
La gráfica de la función $x^2 + 6x + 9$



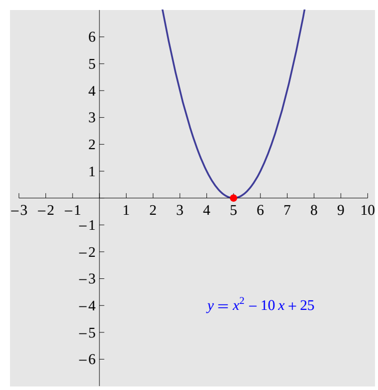
La gráfica de la función $4x^2 + 8x + 16$



La gráfica de la función $x^2 + 10x + 25$



La gráfica de la función $x^2 + 12x + 36$



La gráfica de la función $4x^2 - 10x + 25$

6

Completando el Trinomios cuadrados perfectos

En algunos casos se puede encontrar las raíces de una ecuación cuadrática vía un trinomio cuadrado perfecto (TCP). El completar un binomio a un trinomio cuadrado perfecto se deriva de la siguiente idea: Si $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, y por otro lado tenemos a un binomio $m^2 + nm$, entonces decimos que acompletamos el binomio $m^2 + nm$ a un trinomio cuadrado perfecto sumando y restando un d de tal manera que tenga la forma $a^2 + 2ab + b^2$, para esto hacemos $m = a$, entonces $2b = n$, por lo tanto para obtener un TCP en $m^2 + nm$ basta sumar y restar $(\frac{n}{2})^2$, así

$$m^2 + nm + (\frac{n}{2})^2 - (\frac{n}{2})^2 = (m + \frac{n}{2})^2 - (\frac{n}{2})^2$$

Para encontrar las raíces de la última igualdad se procede como sigue:

$$\begin{aligned} (m + \frac{n}{2})^2 - (\frac{n}{2})^2 &= 0 \\ (m + \frac{n}{2})^2 &= (\frac{n}{2})^2 \\ (m + \frac{n}{2}) &= \pm\frac{n}{2} \\ m &= \pm\frac{n}{2} - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

De donde las raíces son $m_0 = 0$ y $m_1 = -n$, en el caso de tener una expresión del tipo $m^2 + nm + d$, entonces se separa el binomio $m^2 + nm$, y al final se considera a d para obtener las raíces como se hace en los ejemplos 2,3 y 4 siguientes.

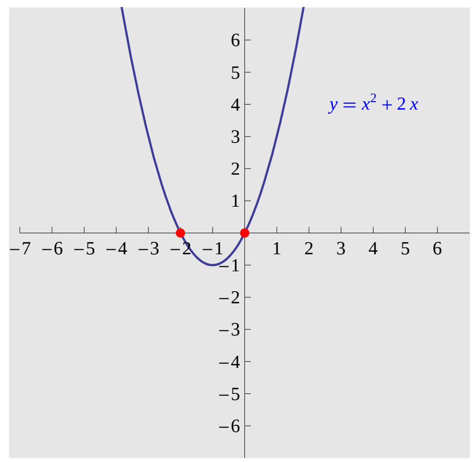
Ejemplos:

$\boxed{\text{Ejemplo 1}}$ La ecuación $x^2 + 2x$ puede resolverse también acompletando el cuadrado de la siguiente manera:

1. Completando el cuadrado $x^2 + 2x + 1 - 1$
2. Factorizando $(x + 1)^2 - 1$
3. Igualando a cero $(x + 1)^2 - 1 = 0$
4. despejando a x:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 1 &= 0\\ (x+1)^2 &= 1\\ x+1 &= \pm 1\\ x &= \pm 1 - 1\end{aligned}$$

Por lo tanto las raíces son: $x_0 = 0$, y $x_1 = -2$.

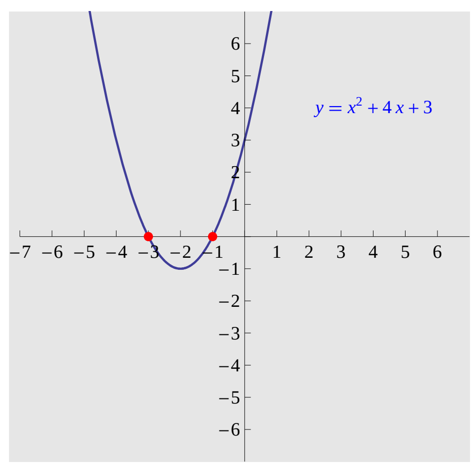


$\boxed{\text{Ejemplo 2}}$ La ecuación $x^2 + 4x + 3$ se resuelve acompletando el cuadrado de la siguiente manera:

1. Completando el cuadrado $(x^2 + 4x + 4) - 4 + 3$
2. Factorizando $(x + 2)^2 - 1$
3. Igualando a cero $(x + 2)^2 - 1 = 0$
4. despejando a x:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - 1 &= 0\\ (x+2)^2 &= 1\\ x+2 &= \pm 1\\ x &= \pm 1 - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto las raíces son: $x_0 = -1$, y $x_1 = -3$.

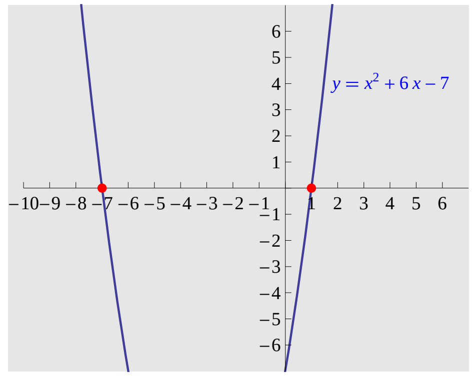


$\boxed{\text{Ejemplo 3}}$ La ecuación x^2+6x-7 puede resolverse acompletando el cuadrado de la siguiente manera:

1. Completando el cuadrado $(x^2+6x+9)-9-7$
2. Factorizando $(x+3)^2-10$
3. Igualando a cero $(x+3)^2-16=0$
4. despejando a x:

$$\begin{aligned} (x+3)^2-16 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 16 \\ x+3 &= \pm 4 \\ x &= \pm 4-3 \end{aligned}$$

Por lo tanto las raíces son: $x_0 = 1$, y $x_1 = -7$.

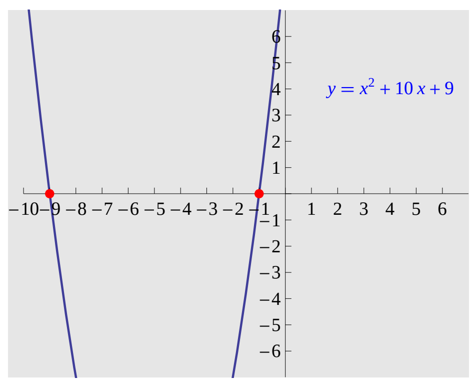


$\boxed{\text{Ejemplo 4}}$ La ecuación $x^2+10x+9$ se resuelve acomple-tando el cuadrado de la siguiente manera:

1. Completando el cuadrado $(x^2+10x+25)-25+9$
2. Factorizando $(x+5)^2-16$
3. Igualando a cero $(x+5)^2-16=0$
4. despejando a x:

$$\begin{aligned} (x+5)^2-16 &= 0 \\ (x+5)^2 &= 16 \\ x+5 &= \pm 4 \\ x &= \pm 4-5 \end{aligned}$$

Por lo tanto las raíces son: $x_0 = -1$, y $x_1 = -9$.



7
La fórmula general

Existe una fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c$, esta fórmula puede aplicarse siempre a los casos anteriores. Las raíces de una ecuación cuadrática son

$$x_{0,1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama discriminante de la ecuación.

A partir del discriminate, podemos clasificar a las parábolas de la siguiente manera:

Caso 1 Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales diferentes. La gráfica de la parábola atraviesa el eje x en dos puntos diferentes.

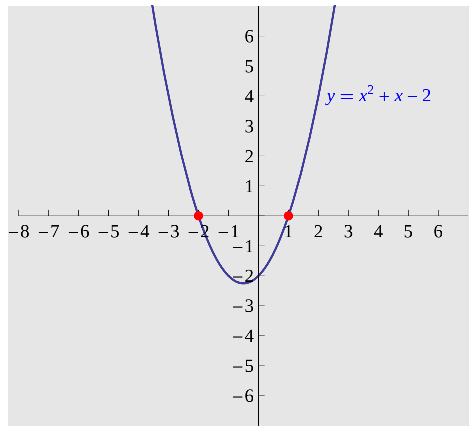
Caso 2 Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales iguales. La gráfica de la parábola toca un solo punto del eje x.

Caso 1 Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces complejas (imaginarias) diferentes. La gráfica de la parábola no atraviesa el eje x.

Ejemplos:

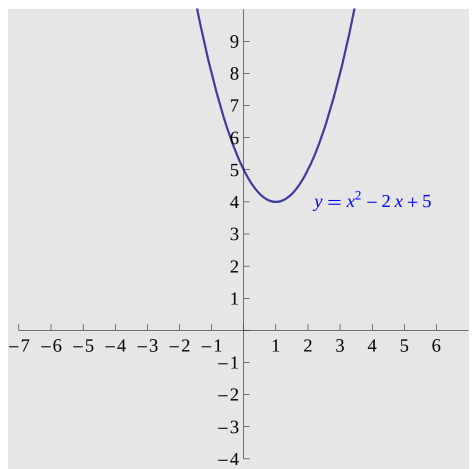
Ejemplo 1 La ecuación $x^2 + x - 2$ puede resolverse por la fórmula general de la siguiente manera:

1. Calculado el discriminate $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$
2. Por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
3. $x_0 = \dfrac{-b + \sqrt{9}}{2a} = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$
4. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{9}}{2a} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$
5. Las raíces son: $x_0 = 1$, y $x_1 = -2$.



Ejemplo 2 La ecuación $x^2 - 2x + 5$ puede resolverse por la fórmula general de la siguiente manera:

1. Calculado el discriminate $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$
2. Por lo tanto la ecuación no tiene soluciones reales.
3. La gráfica de la ecuación no pasa por el eje x.



Ejemplo 3 La ecuación $x^2 + 6x + 9$ puede resolverse por la fórmula general de la siguiente manera:

1. Calculado el discriminate $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(9) = 0$
2. Por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.
3. $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$
4. $x_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$
5. Las raíces son: $x_0 = -3$, y $x_1 = -3$.